

УДК 539.171

КЛАССИФИКАЦИЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ШРЁДИНГЕРА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. Г. Корниенко, А. Р. Френкин, Г. А. Чижов

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Проведена классификация решений одномерных нелинейных уравнений типа Шрёдингера в виде уединенных волн, полученных методом квадратур. Рассмотрены эффективные потенциалы для соответствующих дифференциальных уравнений и исследована структура фазовой плоскости. Даны примеры неустойчивых и осциллирующих решений этих уравнений.

В настоящей работе развит метод решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных типа Шрёдингера (НУШ) специального вида, описывающих обобщенные уединенные волны. Этот подход, основанный на построении обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ), соответствующего данному НУШ, приводит к уравнению с разделяющимися переменными, аналогичному уравнению движения точки в классической механике для потенциальных сил (см. [1] и цитируемые там работы). Достоинством этого метода является исключительная простота получения решений при заданной нелинейности, а также возможность построения НУШ по заданному решению [2].

Отметим, что этот метод позволяет получать решения НУШ в виде уединенных волн и в тех случаях, когда неизвестна соответствующая обратная задача рассеяния. В данной работе мы вообще не будем рассматривать обратную задачу рассеяния и тем самым различать солитоны и уединенные волны в общепринятом смысле [3, 4].

Развитые в классической механике методы качественного исследования решений таких уравнений позволяют провести следующую классификацию решений НУШ на основе общепринятой в механике материальной точки [5].

1. По характеру и взаимному расположению на фазовой плоскости особых точек и особых кривых (сепаратрис) соответствующего дифференциального уравнения. Такая классификация определяет общую структуру типов решений НУШ, их количество и характер (статические, колебательные, солитонные, кинковые, неустойчивые (взрывные)).

2. По типу особых точек ОДУ, ограничивающих область возможного движения. Такая классификация определяется возможностью достижения особых точек за конечное фазовое время. Будем называть особые точки точками поворота, если они достигаются изображающей точкой за конечное фазовое время, и точками остановки, если они не достигаются за конечное время.

Области финитного движения изображающей точки, ограниченной двумя точками поворота, соответствует осциллирующее решение НУШ.

Области финитного движения, ограниченной одной точкой поворота и одной точкой остановки, соответ-

ствует солитонное решение НУШ.

Области, ограниченной двумя точками остановки, соответствует кинковое решение НУШ.

Неустойчивые (взрывные) решения — инфинитные, ограниченные лишь одной особой точкой или не имеющие особых точек. Отметим, что неустойчивые решения также представляют интерес, так как в ряде случаев может быть решена обратная задача для сингулярных потенциалов [6].

Асимптотическое поведение решения ОДУ вблизи точки остановки определяет вид решения НУШ для каждого из рассмотренных типов. В зависимости от характера движения в окрестности особой точки можно выделить:

1) нормальные решения, с экспоненциальным поведением при больших фазовых временах (солитоны и кинки);

2) слабые (степенные) решения — слабые солитоны или слабые кинки;

3) сильные решения (сверхсолитоны или сверхкинки), спадающие быстрее экспоненты при больших фазовых временах.

Рассмотрим решение НУШ

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + F(|\Psi|) \Psi \quad (1)$$

в виде уединенной волны.

Следуя методу [1, 2], представим $\Psi(x, t)$ в виде

$$\Psi(x, t) = \exp(i\delta t + ipz)y(z),$$

где $p = V/2$, а $y(z)$ — действительная функция, зависящая от единственной переменной — фазы $z = x - Vt$ и удовлетворяющая ОДУ:

$$y_{zz} + E_0 y - F(|y|)y = 0, \quad (2)$$

δ — действительное число. Параметр E_0 , определяющий вид решения, равен $E_0 = V^2/4 - \delta$. Для любого нелинейного уравнения указанного вида возможно движение волны с произвольной наперед заданной скоростью V .

Как известно, для ОДУ типа (2) имеется интегрирующий множитель, позволяющий представить решения в виде квадратуры:

$$z - z_0 = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{E - U(y)}}. \quad (3)$$

Здесь $U(y) = U(|y|, E_0) = E_0 y^2 - 2 \int F(|y|) y dy$ — эффективный потенциал для нелинейного уравнения (2), зависящий от параметра E_0 , определяющего вид решения, а E и z_0 — константы интегрирования, определяемые начальными условиями. Для использованных в данной работе потенциалов зависимость от $|y|$ не приводит к дополнительным трудностям при дифференцировании. Действительная фаза существует при выполнении условия $E - U(y) \geq 0$, что определяет область изменения переменной y — «область движения» (амплитуды солитона или кинка). Решение этого неравенства удобно представлять графически.

Исследование решений данного уравнения проводится в соответствии с общей схемой, указанной выше. Представление решения ОДУ в виде квадратуры практически не ограничивает выбор нелинейности в НУШ. При полиномиальных потенциалах $U(y)$, наиболее часто используемых в приложениях, интегралы указанного типа являются эллиптическими (или гиперэллиптическими), которые хорошо изучены [7].

В качестве примера рассмотрим полиномиальный потенциал вида

$$U(y) = -\beta(y^2 - c)(y^2 - 1)^2,$$

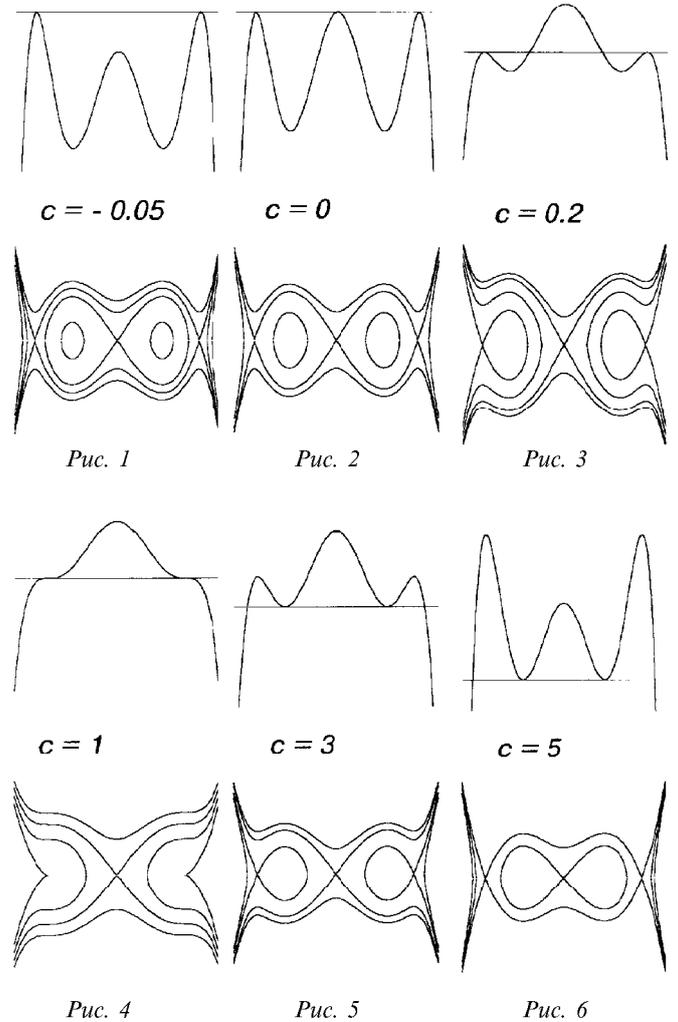
где $\beta > 0$, а c — некоторый действительный параметр. Соответствующее этому потенциалу НУШ имеет вид

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \beta |\Psi|^2 \{3|\Psi|^2 - 2(2+c)\} \Psi,$$

а параметр выберем равным $E_0 = -\beta(1+2c)$.

В зависимости от значения c потенциал имеет вид, изображенный на рис. 1–6. Выбор параметра задачи E и начальных условий определяет область возможных движений изображающей точки и, соответственно, количество различных решений НУШ и их характер — ограниченные (при соответствующих значениях параметра) или неустойчивые (взрывные).

1°. При $c < 0$ и $U_{\min} < E < U_{\max}$ движение изображающей точки финитно, если она находится в области между двумя любыми локальными максимумами кривой $U(y)$. В области изменения параметра $E : U_{\min} < E < U(0)$ при $-1/2 < c < 0$ (см. рис. 1) имеются две несвязанные области движения изображающей точки, что в общем случае соответствует двум различным решениям НУШ. В данной ситуации при определении волнового пакета как $|\Psi|^2$ различие исчезает, т.е. этот случай является вырожденным. При $E > U_{\max} = U(\pm 1)$ движение инфинитно для всех значений фазового времени. Движение является также инфинитным, а решение НУШ неустойчивым и при $E < U_{\max}$, если изображающая точка находится в области возможного движения слева или справа от кривой $U(y)$.



2°. Классификацию финитного движения изображающей точки ОДУ и, соответственно, решений НУШ удобно провести по типу особых точек, ограничивающих область возможного движения. Так, в рассматриваемом примере при $U_{\min} < E < U(0)$ (см. рис. 1) в случае $-1/2 < c < 0$ решение носит колебательный характер, поскольку область возможного движения ограничена точками поворота. При этом параметр E_0 удовлетворяет условию $-\beta < E_0 < 0$. Достижимость граничных точек за конечное фазовое время обусловлена тем, что первые производные потенциала в этих точках не обращаются в нуль, что и обеспечивает сходимость интеграла (3) в этих точках.

При $E = U(0) = \beta$, $-1/2 < c < 0$, одна из особых точек ($y = 0$) становится точкой остановки и интеграл (3) в этой точке расходится. Область движения изображающей точки ограничена одной точкой остановки и одной точкой поворота, что соответствует солитонному решению НУШ. Интеграл (3) в этом случае может быть вычислен в элементарных функциях:

$$2\beta^{1/2} \sqrt{1+2c} (z - z_0) = -\ln \left| \frac{2(1+2c) - (2+c)y^2 + 2\sqrt{1+2c}\sqrt{y^4 - (2+c)y^2 + 1+2c}}{4(1+2c)y^2} \right|.$$

Обращение интеграла приводит к решению НУШ вида

$$\Psi(x, t) = \pm 4(1 + 2c) \exp \left\{ \mp \beta^{1/2} \sqrt{1 + 2c} (z - z_0) \right\} \times \exp \{ i(px - \mathcal{E}t) \} \times \left\{ \left[4(1 + 2c) \exp \left\{ \mp 2\beta^{1/2} \sqrt{1 + 2c} (z - z_0) \right\} + 2 + c \right]^2 - 4(1 + 2c) \right\}^{-1/2},$$

где $\mathcal{E} = E_0 + p^2$.

Изменение параметра c переводит это солитонное решение при $c = 0$ в кинковое, приведенное в [1],

$$\Psi(x, t) = \pm \frac{\exp \{ i(px - \mathcal{E}t) \}}{\sqrt{1 + \exp \{ \mp 2\beta^{1/2} (z - z_0) \}}}, \quad E_0 = -\beta,$$

и далее в неустойчивое при $c > 0$. Неограниченный рост переменной y происходит или асимптотически (обычно экспоненциально), или за конечное фазовое время z . Если нелинейность имеет степенной характер (асимптотический) $U(y) \sim |y|^\alpha$, то $|y| \sim |z|^{2/(2-\alpha)}$ и взрывная неустойчивость (на сепаратрисе) возможна при $\alpha > 2$. В рассматриваемом случае $\alpha = 6$ и при малых фазовых временах решение имеет корневую особенность:

$$\Psi(x, t) \sim \frac{\exp \{ i(px - \mathcal{E}t) \}}{\sqrt{\mp \beta^{1/2} (z - z_0)}}.$$

При $\beta c = E = 0$ (на сепаратрисе) неустойчивые решения имеют вид

$$\Psi(x, t) = \pm \frac{\exp \{ i(px - \mathcal{E}t) \}}{\sqrt{1 - \exp \{ \pm \beta^{1/2} (z - z_0) \}}}.$$

Это изменение параметра c сопровождается изменением структуры фазовой плоскости ОДУ (см. рис. 1–6).

В качестве примера задачи, имеющей решение в элементарных функциях, рассмотрим потенциал вида

$$U(y) = E_0 y^2 + \frac{2}{3} \beta |y|^3, \quad F(|y|) = -\beta |y|. \quad (4)$$

Этот потенциал вместе с фазовыми портретами для случая $\beta > 0$ приведен на рис. 7.

При $\beta > 0$ и $E_0 < 0$ в окрестности точки устойчивого равновесия $y = y_0$ при малом отклонении постоянной интегрирования E от U_{\min} ($E = U_{\min} + \varepsilon$) в разложении потенциала $U(y)$ можно ограничиться лишь квадратичным членом:

$$U(y) = U_{\min} + \omega^2 (y - y_0)^2, \quad y_0 = |E_0|/\beta, \quad \omega = \sqrt{E_0}.$$

Тогда огибающая волнового пакета осциллирует около равновесного значения с частотой ω , не зависящей от амплитуды $A = \sqrt{\varepsilon/|E_0|}$ (приближение линейных колебаний). В этом случае решение НУШ имеет вид

$$\Psi(x, t) = (y_0 + A \sin \omega(z - z_0)) \exp i(px - \mathcal{E}t),$$

где $\mathcal{E} = E_0 + p^2$.

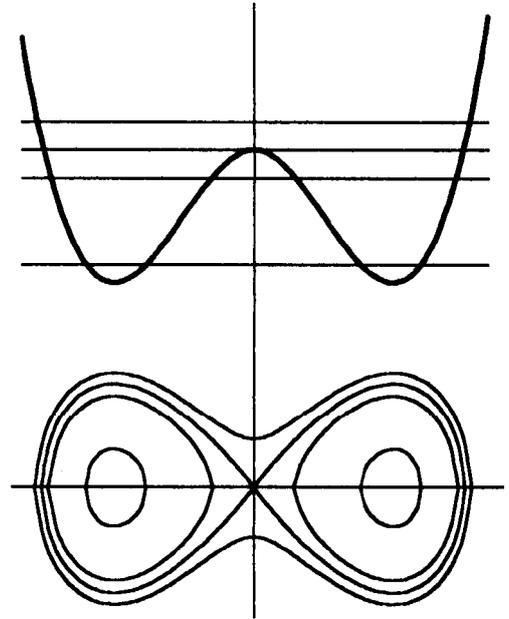


Рис. 7

При $E = E_0$ (на сепаратрисе) имеется солитонное решение уравнения (1):

$$\Psi(x, t) = \pm \frac{3|E_0|}{2\beta} \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{\sqrt{|E_0|}}{2} (z - z_0) \right) \exp i(px - \mathcal{E}t).$$

При увеличении постоянной E это решение переходит в двойной осциллирующий солитон — серию пар пакетов.

При уменьшении энергии E от значения на сепаратрисе на ε решение типа солитона становится осциллирующим, переходит в бесконечную серию пакетов, разделенных пространственным интервалом λ :

$$\lambda = 2 \int_a^b \frac{dy}{\sqrt{-\varepsilon - U(y)}} \approx 2 \int_{a/2}^b \frac{dy}{\sqrt{-U(y)}} \approx \frac{2}{\sqrt{|E_0|}} \ln \left| \frac{12|E_0|^{3/2}}{\beta \sqrt{\varepsilon}} \right|, \quad a = \sqrt{\frac{\varepsilon}{|E_0|}}.$$

Отметим, что нижний предел интегрирования здесь выбирается из условия сшивания точного решения ($E = \varepsilon$) и решения на сепаратрисе ($E = 0$) [5]. Значение ε таково, что выполняется неравенство $a \ll b \approx 3|E_0|/2\beta$.

При $\beta < 0$ рассматриваемое НУШ с кубическим потенциалом имеет решения другого типа, которые, однако, также представимы в элементарных функциях. В качестве примера приведем неустойчивое решение НУШ на сепаратрисе:

$$\Psi(x, t) = \mp \frac{E_0}{\beta} \left(1 + \frac{3}{2} \operatorname{sh}^{-2} \left(\frac{\sqrt{E_0}(z - z_0)}{2} \right) \right) \times \exp \{ i(px - \mathcal{E}t) \}.$$

В заключение отметим, что в данной работе рассмотрены лишь солитоны и кинки с экспоненциальным поведением на бесконечности. Поведение решений нелинейных эволюционных уравнений (1) другого типа будут рассмотрены в дальнейшем.

Литература

1. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М., 1985.
2. Корниенко А. Г., Тернов И. М., Френкин А. Р., Чижов Г. А. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1995. №4. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1995. N 4. P. 1).
3. Тахтаджан Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М., 1986.
4. Маханьков В. Г., Рыбаков Ю. П., Санюк В. И. // УФН. 1994. **164**, №2. С. 121.
5. Халилов В. Р., Чижов Г. А. Динамика классических систем: Учеб. пособие. М., 1993.
6. Гостев В. Б., Френкин А. Р. // ТМФ. 1991. **88**, №1. С. 37.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 3. М., 1967.

Поступила в редакцию
12.02.97