Структура	Мода	$(\mathrm{Re}\beta/k)_{\mathrm{exp}}$	$(\mathrm{Im}\beta/k)_{\mathrm{exp}}\cdot 10^7$	kd
В/П/Ag	TE_0	1,584	11	26
В/П/Al	TE_0	1,588	30	59
В/П/Au	TE_0	1,588	4	72

В заключение отметим, что данный алгоритм оказывается особенно удобным при вычислении функций, обратных трансцендентным (в общем случае, комплексного аргумента), удовлетворяющим ДП (или ДА) свойству, так как алгоритм не требует при его реализации вычисления этих функций и их производных.

Алгоритм может быть использован в решении обратных задач идентификации геометрических и физических параметров по известным спектральным характеристикам.

Литература

1. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. М., 1965.
2. *Моденов В.П.* // ДАН СССР. 1987. **296**, № 3. С 536.
3. *Крылов Г.Н.* // Проблемы дифракции и распространения волн. Л., 1985. № 19. С 174.
4. *Моденов В.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Вычислит. матем. и киберн. 1983. № 2. С 62.
5. *Kaminov I.P., Mammel W.L., Weber H.P.* // Appl. Opt. 1974. **13**. P 396.

Поступила в редакцию
03.03.97

УДК 530.12:514.743

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ТЕНЗОРА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПСЕВДОРИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

В. И. Григорьев, И. П. Денисова

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Получены явные выражения для степеней тензора электромагнитного поля через три низшие степени этого тензора, метрический тензор псевдориманова пространства-времени и два независимых инварианта электромагнитного поля.

В последнее время вновь возник интерес к нелинейным моделям [1] классической и квантовой электродинамики. При исследовании таких моделей могут оказаться полезными предлагаемые нами тензорные соотношения, которые следуют из теоремы [2] о степенях тензора второго ранга.

Рассмотрим некоторое N-мерное псевдориманово пространство $R^N_{p,N-p}$, т. е. пространство, сигнатура метрики которого содержит p знаков плюс и $N-p$ знаков минус. Пусть в этом пространстве задан антисимметричный тензор электромагнитного поля $F_{ik}(x) = -F_{ki}(x)$.

Назовем S-й степенью данного тензора тензор $F^{(S)}_{ik}(x)$, построенный из произведения s тензоров $F_{ml}(x)$, индексы которых свернуты метрическим тензором g^{ik} по правилу

$$F^{(S)}_{ik} = \underbrace{F_{im_1}\cdot g^{m_1n_1}\cdot F_{n_1m_2}\ldots g^{m_{s-1}n_{s-1}}\cdot F_{n_{s-1}k}}_{S}.$$

Сворачивая оставшиеся индексы в этом выражении, получим инвариант S-й степени этого тензора:

$$I_{(S)} = F^{(S)}_{ik}(x)\cdot g^{ik}.$$

При $S=0$ в соответствии с этим определением будем полагать $F^{(0)}_{ik} = g_{ik}$, в результате чего инвариант нулевой степени любого тензора второго ранга совпадает с размерностью пространства: $I_{(0)} = N$.

Так как инварианты нечетной степени антисимметричного тензора равны нулю, то, используя соотношения работы [2], несложно доказать, что N-я степень тензора F_{ik} в пространстве $R^N_{p,N-p}$ является комбинацией четных степеней этого тензора, если размерность пространства N — четное число, и нечетных степеней тензора F_{ik}, если размерность пространства N — нечетное число:

$$F^{(N)}_{ik}(x) = -\sum_{s=1}^{[N/2]}\Psi^{(N-2s)}_{ik}Y^{(2s)},$$

где $[N/2]$ означает целую часть от $N/2$, а выражения для коэффициентов $Y^{(2s)}$ могут быть получены из рекуррентного уравнения ($Y^{(0)}=1$):

$$Y^{(2s)} = -\frac{1}{2s}\sum_{k=0}^{s-1} I_{(2s-2k)}Y^{(2k)},\quad s=1,2,\ldots,N.$$

Отсюда непосредственно следует, что в пространстве $R^4_{1,3}$ четвертая степень тензора электромагнитного поля может быть выражена через вторую степень этого тензора, метрический тензор g_{ik} и два независимых инварианта тензора электромагнитного поля:

$$F^{(4)}_{ik} = \frac{1}{2}F^{(2)}_{ik}I_{(2)} + \frac{1}{8}g_{ik}\left[2I_{(4)} - I^2_{(2)}\right]. \tag{1}$$

Таким образом, произвольная степень $s\geq 4$ тензора электромагнитного поля в этом пространстве также может быть представлена в виде комбинации трех низших степеней тензора F_{ik}, метрического тензора g_{ik} и двух независимых инвариантов тензора электромагнитного поля.

Найдем эту зависимость в явном виде. Но перед этим перейдем в соотношении (1) от инвариантов $I_{(2)}$ и $I_{(4)}$ к другим независимым инвариантам $J_{(1)}$ и $J_{(2)}$, чаще всего используемым в электродинамике и представляющим собой комбинации инвариантов $I_{(2)}$ и $I_{(4)}$:

$$J_{(1)} = \frac{1}{2} I_{(2)}, \quad J_{(2)} = \frac{1}{8}\left[2I_{(4)} - I_{(2)}^2\right].$$

Такой выбор обусловлен тем, что в инерциальных системах отсчета псевдоевклидова пространства-времени инварианты $J_{(1)}$ и $J_{(2)}$ имеют достаточно простой вид: $J_{(1)} = \mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$, $J_{(2)} = (\mathbf{EH})^2$ и позволяют по их величине судить о взаимной ориентации векторов напряженностей электрического и магнитного полей и соотношении между квадратами их модулей. Инварианты же $I_{(2)}$ и $I_{(4)}$ имеют более сложный вид:

$$I_{(2)} = 2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2), \quad I_{(4)} = 2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)^2 + 4(\mathbf{EH})^2$$

и поэтому оказываются менее удобными.

В этих обозначениях выражение для четвертой степени тензора электромагнитного поля принимает вид

$$F_{ik}^{(4)} = F_{ik}^{(2)} J_{(1)} + g_{ik} J_{(2)}. \tag{2}$$

Обобщая это равенство, запишем выражение для тензора $F_{ik}^{(4s)}$ в виде

$$F_{ik}^{(4s)} = F_{ik}^{(2)} Q^{(s)} + g_{ik} P^{(s)}, \tag{3}$$

где $P^{(s)}$ и $Q^{(s)}$ – пока неизвестные функции от инвариантов $J_{(1)}$ и $J_{(2)}$. Умножая последовательно соотношение (3) на $F_{m\cdot}^{\cdot i}$, $F^{(2)\cdot i}_{m\cdot}$, и $F^{(3)\cdot i}_{m\cdot}$, получим

$$F_{mk}^{(4s+1)} = F_{ik}^{(3)} Q^{(s)} + F_{mk} P^{(s)}, \tag{4}$$

$$F_{mk}^{(4s+2)} = F_{ik}^{(2)}\left[P^{(s)} + J_{(1)} Q^{(s)}\right] + g_{mk} Q^{(s)} J_{(2)},$$

$$F_{mk}^{(4s+3)} = F_{ik}^{(3)}\left[P^{(s)} + J_{(1)} Q^{(s)}\right] + F_{mk} Q^{(s)} J_{(2)}.$$

Соотношения (3) и (4) исчерпывают всю бесконечную совокупность тензоров $F_{mk}^{(p)}$ $(p = 4, 5, 6, \ldots \infty)$.

Определим теперь функции $P^{(s)}$ и $Q^{(s)}$, входящие в эти выражения. Для этого умножим последнее из выражений (4) на $F_{i\cdot}^{\cdot m}$. В результате получим

$$\begin{aligned} F_{ik}^{(4s+4)} = & F_{ik}^{(2)}\left[J_{(1)} P^{(s)} + (J_{(1)}^2 + J_{(2)}) Q^{(s)}\right] + \\ & + g_{ik}\left[P^{(s)} + J_{(1)} Q^{(s)}\right] J_{(2)}. \end{aligned}$$

Так как индекс у этого тензора кратен четырем, то в силу определения (3) он должен иметь вид

$$F_{ik}^{(4s+4)} = F_{ik}^{(2)} Q^{(s+1)} + g_{ik} P^{(s+1)}.$$

Сравнивая это соотношение с выражением (3), получим следующие рекуррентные уравнения для определения функций $Q^{(s)}$ и $P^{(s)}$:

$$\begin{aligned} Q^{(s+1)} &= \left[J_{(1)} P^{(s)} + (J_{(1)}^2 + J_{(2)}) Q^{(s)}\right], \\ P^{(s+1)} &= \left[P^{(s)} + J_{(1)} Q^{(s)}\right] J_{(2)}. \end{aligned} \tag{5}$$

Формальные начальные условия при $s = 0$ для этих уравнений, согласующиеся с выражениями (2) и (3), имеют вид $Q^{(0)} = 0, P^{(0)} = 1$. Для решения уравнений (5) воспользуемся предлагаемым нами методом, который в некоторой степени является обратным по отношению к методу, обычно используемому в теории функций Бесселя [3].

Построим производящие функции для $Q^{(s)}$ и $P^{(s)}$:

$$h_1(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^{(n)} \xi^n}{n!}, \quad h_2(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{(n)} \xi^n}{n!}. \tag{6}$$

Система (5) может быть получена после подстановки производящих функций (6) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dh_1}{d\xi} = \left[J_{(1)}^2 + J_{(2)}\right] h_1 + J_{(1)} h_2, \tag{7}$$

$$\frac{dh_2}{d\xi} = J_{(1)} J_{(2)} h_1 + J_{(2)} h_2$$

и разложения каждого из них в ряд по степеням ξ. Решая систему (7) стандартным методом с начальными условиями $h_1(0) = 0, h_2(0) = 1$, являющимися следствием условий $Q^{(0)} = 0, P^{(0)} = 1$, получим

$$\begin{aligned} h_1(\xi) = & \frac{1}{\sqrt{4J_{(2)} + J_{(1)}^2}} \times \\ & \times \left\{ \exp\left[\left(2J_{(2)} + J_{(1)}^2 + J_{(1)}\sqrt{4J_{(2)} + J_{(1)}^2}\right)\frac{\xi}{2}\right] - \right. \\ & \left. - \exp\left[\left(2J_{(2)} + J_{(1)}^2 - J_{(1)}\sqrt{4J_{(2)} + J_{(1)}^2}\right)\frac{\xi}{2}\right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2(\xi) = & \frac{\sqrt{4J_{(2)} + J_{(1)}^2} - J_{(1)}}{2\sqrt{4J_{(2)} + J_{(1)}^2}} \times \\ & \times \exp\left[\left(2J_{(2)} + J_{(1)}^2 + J_{(1)}\sqrt{4J_{(2)} + J_{(1)}^2}\right)\frac{\xi}{2}\right] + \\ & + \frac{\sqrt{4J_{(2)} + J_{(1)}^2} + J_{(1)}}{2\sqrt{4J_{(2)} + J_{(1)}^2}} \times \\ & \times \exp\left[\left(2J_{(2)} + J_{(1)}^2 - J_{(1)}\sqrt{4J_{(2)} + J_{(1)}^2}\right)\frac{\xi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Теперь для определения $Q^{(n)}$ и $P^{(n)}$ нам необходимо разложить эти функции в бесконечные ряды по степеням ξ и сравнить с выражением (6) коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях ξ.

В результате получим выражения, отчасти напоминающие последовательность Фибоначчи:

$$Q^{(n)} = \frac{1}{2^n\sqrt{4J_{(2)} + J_{(1)}^2}} \times \\ \times \left\{ \left[2J_{(2)} + J_{(1)}^2 + J_{(1)}\sqrt{4J_{(2)} + J_{(1)}^2} \right]^n - \\ - \left[2J_{(2)} + J_{(1)}^2 - J_{(1)}\sqrt{4J_{(2)} + J_{(1)}^2} \right]^n \right\},$$

$$P^{(n)} = \frac{1}{2^{n+1}} \left\{ \left[2J_{(2)} + J_{(1)}^2 + J_{(1)}\sqrt{4J_{(2)} + J_{(1)}^2} \right]^n + \\ + \left[2J_{(2)} + J_{(1)}^2 - J_{(1)}\sqrt{4J_{(2)} + J_{(1)}^2} \right]^n \right\} - \\ - \frac{J_{(1)}}{2} Q^{(n)}.$$

Используя разложение бинома Ньютона, отсюда найдем

$$Q^{(n)} = \frac{\Gamma(n+1)}{2^{n-1}} \times \\ \times \sum_{p=0}^{[(n-1)/2]} \frac{J_{(1)}^{2p+1} \left(2J_{(2)} + J_{(1)}^2\right)^{n-2p-1} \left(4J_{(2)} + J_{(1)}^2\right)^p}{\Gamma(2p+2)\Gamma(n-2p)}, \tag{8}$$

$$P^{(n)} = \frac{\Gamma(n+1)}{2^n} \times \\ \times \sum_{p=0}^{[n/2]} \frac{J_{(1)}^{2p} \left(2J_{(2)} + J_{(1)}^2\right)^{n-2p} \left(4J_{(2)} + J_{(1)}^2\right)^p}{\Gamma(2p+1)\Gamma(n-2p+1)} - \\ - \frac{J_{(1)}}{2} Q^{(n)}.$$

Очевидно, что при конечных значениях n $(n < \infty)$ $Q^{(n)}$ и $P^{(n)}$ представляют собой полиномы конечной степени от двух независимых инвариантов электромагнитного поля $J_{(1)}$ и $J_{(2)}$. Поэтому в силу соотношений (3) и (4) все степени тензора электромагнитного поля $F_{ik}^{(n)}$ при $4 \le n < \infty$ могут быть выражены через первые три степени этого тензора, метрический тензор и полиномы конечных степеней относительно независимых инвариантов электромагнитного поля $J_{(1)}$ и $J_{(2)}$.

Сворачивая в выражениях (3)–(4) индексы, получим

$$I_{(4s)} = 4Q^{(s)} + 2J_{(1)}P^{(s)},$$
$$I_{(4s+2)} = 4J_{(2)}Q^{(s)} + 2J_{(1)}\left[P^{(s)} + J_{(1)}Q^{(s)}\right].$$

Эти соотношения, с учетом выражений (2) и (8), дают в явном виде зависимость инвариантов электромагнитного поля высших степеней через два независимых инварианта $J_{(1)}$ и $J_{(2)}$.

Литература

1. *Munez G.* // Amer. J. Phys. 1996. **64**. P. 1285.
2. *Денисова И.П.* // ТМФ. 1995. **105**, №3. С. 508.
3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1972.

Поступила в редакцию
20.02.97