

В результате получим выражения, отчасти напоминающие последовательность Фибоначчи:

$$Q^{(n)} = \frac{1}{2^n \sqrt{4J_{(2)} + J_{(1)}^2}} \times \left\{ \left[2J_{(2)} + J_{(1)}^2 + J_{(1)} \sqrt{4J_{(2)} + J_{(1)}^2} \right]^n - \left[2J_{(2)} + J_{(1)}^2 - J_{(1)} \sqrt{4J_{(2)} + J_{(1)}^2} \right]^n \right\},$$

$$P^{(n)} = \frac{1}{2^{n+1}} \left\{ \left[2J_{(2)} + J_{(1)}^2 + J_{(1)} \sqrt{4J_{(2)} + J_{(1)}^2} \right]^n + \left[2J_{(2)} + J_{(1)}^2 - J_{(1)} \sqrt{4J_{(2)} + J_{(1)}^2} \right]^n \right\} - \frac{J_{(1)}}{2} Q^{(n)}.$$

Используя разложение бинома Ньютона, отсюда найдем

$$Q^{(n)} = \frac{\Gamma(n+1)}{2^{n-1}} \times \sum_{p=0}^{[(n-1)/2]} \frac{J_{(1)}^{2p+1} (2J_{(2)} + J_{(1)}^2)^{n-2p-1} (4J_{(2)} + J_{(1)}^2)^p}{\Gamma(2p+2)\Gamma(n-2p)}, \quad (8)$$

$$P^{(n)} = \frac{\Gamma(n+1)}{2^n} \times \sum_{p=0}^{[n/2]} \frac{J_{(1)}^{2p} (2J_{(2)} + J_{(1)}^2)^{n-2p} (4J_{(2)} + J_{(1)}^2)^p}{\Gamma(2p+1)\Gamma(n-2p+1)} - \frac{J_{(1)}}{2} Q^{(n)}.$$

Очевидно, что при конечных значениях n ($n < \infty$) $Q^{(n)}$ и $P^{(n)}$ представляют собой полиномы конечной степени от двух независимых инвариантов электромагнитного поля $J_{(1)}$ и $J_{(2)}$. Поэтому в силу соотношений (3) и (4) все степени тензора электромагнитного поля $F_{ik}^{(n)}$ при $4 \leq n < \infty$ могут быть выражены через первые три степени этого тензора, метрический тензор и полиномы конечных степеней относительно независимых инвариантов электромагнитного поля $J_{(1)}$ и $J_{(2)}$.

Сворачивая в выражениях (3)–(4) индексы, получим

$$I_{(4s)} = 4Q^{(s)} + 2J_{(1)}P^{(s)},$$

$$I_{(4s+2)} = 4J_{(2)}Q^{(s)} + 2J_{(1)} [P^{(s)} + J_{(1)}Q^{(s)}].$$

Эти соотношения, с учетом выражений (2) и (8), дают в явном виде зависимость инвариантов электромагнитного поля высших степеней через два независимых инварианта $J_{(1)}$ и $J_{(2)}$.

Литература

1. Munez G. // Amer. J. Phys. 1996. **64**. P. 1285.
2. Денисова И.П. // ТМФ. 1995. **105**, № 3. С. 508.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1972.

Поступила в редакцию
20.02.97

УДК 537.87

**РЕКОНСТРУКЦИЯ ПРОФИЛЯ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ
ДЛЯ ПЛАЗМЕННЫХ СЛОЕВ РАЗЛИЧНОЙ ВЕЛИЧИНЫ
ПО ДАННЫМ РАДИОЗОНДИРОВАНИЯ**

В. Е. Куницын, И. А. Нестерев
(кафедра физики атмосферы)

Обсуждается влияние величины слоя на возможность его восстановления. Показано, что в случае больших потенциалов с долинами коэффициент отражения резко меняется внутри узких частотных интервалов; вне этих интервалов с хорошей точностью применимо приближение геометрической оптики. При возрастании величины потенциала ширина интервалов быстро уменьшается (с экспоненциальной скоростью) и они становятся практически нерегистрируемыми, поэтому на практике невозможно получить полную информацию о потенциале, что приводит к неоднозначности при решении обратной задачи.

Задачи радиозондирования слоистой плазмы возникают при исследовании разнообразных физических объектов: ионосферы, лабораторной плазмы, полупроводниковых пленок и т.д., поэтому параметры реконструируемых плазменных слоев — толщина и электронная концентрация — могут варьироваться в широких пределах. В настоящей работе исследуется влияние величины слоя на возможность его восстановления.

Комплексная амплитуда плоской монохроматической волны, распространяющейся в слоистой плазме, удовлетворяет уравнению, аналогичному стационарному уравнению Шрёдингера

$$\frac{d^2u}{dx^2} + (k^2 - q(x, \omega))u = 0, \quad (1)$$

где $q(x, \omega) = 4\pi r_e \mathcal{N}(x)$ (в приближении холодной

плазмы), $\mathcal{N}(x)$ — электронная концентрация, r_e — классический радиус электрона, k — волновое число. Задача восстановления потенциала $q(x)$ по комплексному коэффициенту отражения на различных частотах $R(k)$ математически эквивалентна одномерной обратной задаче потенциального рассеяния (ОЗР) в квантовой механике, но она имеет при этом и два существенных отличия: во-первых, при учете поглощения потенциал является комплексным и, во-вторых, хотя потенциал и не имеет особенностей, величина его (выраженная в длинах волн) во многих важных случаях может оказаться крайне большой. Для действительных потенциалов ОЗР является хорошо изученной, существуют различные методы ее решения, от схемы Гельфанда–Левитана–Марченко [1–3] до методов послойного восстановления потенциала и использования точно решаемых моделей [3–5]. Однако практическое применение методов решения ОЗР к задачам радиозондирования не всегда оказывается успешным: хорошо поддаются восстановлению лишь потенциалы достаточно малой величины. (Если сделать замену переменных $\tilde{x} = x/a$, сохраняющую вид уравнения (1), то с ее помощью можно перейти к безразмерным переменным и потенциалу единичной ширины. Величину такого приведенного потенциала и будем понимать под величиной исходного потенциала.)

Потенциалы величиной порядка единицы могут быть успешно восстановлены различными методами, в то время как решение ОЗР для потенциалов порядка 10^3 и более может оказаться практически неосуществимым. Ниже мы приведем пример того, как работает для потенциалов различной величины численный алгоритм, основанный на методе Гельфанда–Левитана–Марченко (ГЛМ), а затем обсудим причины, по которым практические реализации как этого, так и других методов могут оказаться непригодными для нахождения достаточно больших потенциалов произвольного вида.

При использовании схемы ГЛМ подразумевается, что известен комплексный коэффициент отражения как функция волнового числа на всей прямой. В случае действительных потенциалов значения коэффициента отражения для отрицательного аргумента выражаются через значения для положительного: $R(-k) = R^*(k)$, поэтому достаточно знать зависимость $R(k)$ на положительной полупрямой. В случае комплексных потенциалов, когда эта формула неверна, значения коэффициента отражения в нефизической отрицательной области частот могут быть выражены через данные рассеяния с двух сторон следующим образом:

$$R(-k) = \frac{R(k)}{R_+(k)R(k) - T_+(k)T(k)}. \quad (\text{Здесь } R(k), T(k) \text{ — коэффициенты отражения и прохождения слева, } R_+(k), T_+(k) \text{ — справа.)}$$

Пусть $M(x)$ — фурье-образ $R(k)$, $M(x) = \frac{1}{2\pi} \times \int_{-\infty}^{\infty} R(k) e^{-ikx} dk$, а $K(x, y)$ — решение уравнения

ГЛМ [4]:

$$K(x, y) + M(x+y) + \int_{-y}^x K(x, \xi) M(\xi+y) d\xi = 0, \quad (2)$$

$$-x \leq y \leq x, \quad x \geq 0,$$

тогда потенциал (будем полагать его финитным, $\text{supp } q(x) = [0, 1]$) может быть найден по формуле $q(x) = 2 \frac{d}{dx} K(x, x)$, $x \geq 0$.

Для проведения вычислений по схеме ГЛМ необходимо перейти от непрерывной задачи к дискретной. Будем считать, что коэффициент отражения известен нам на промежутке $[-k_{\max}, k_{\max}]$ в точках $k_n = (2n - N)k_{\max}/N$, $n = 0, N$. Используя дискретное преобразование Фурье, найдем $M(x)$ в точках $x_i = i/L$, $i = 0, 2L$. Уравнение (3) после дискретизации становится системой линейных уравнений размерности $2i$, решая которую методом Гаусса, можно найти значения $K(x_i, x_i)$, а затем по этим значениям определить потенциал.

Дискретизация уравнения ГЛМ и преобразования Фурье, использование значений коэффициента отражения на конечном интервале, а не на всей прямой, погрешности в исходных данных — все это ведет к определенной погрешности результата. Исследование величины этой погрешности проводилось на тестовых потенциалах вида

$$q(x) = h \left(1, 25 - e^{-100(x-0,45)^2} \right) \sin^2 \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3)$$

при различной величине h . (Исходные данные — коэффициенты отражения $R(k_n)$, полученные в результате численного решения прямой задачи.)

На рис. 1–3 представлены результаты расчетов для потенциалов величины $h = 10, 100$ и 1000 соответственно. В каждом случае $k_{\max} = 15\pi$, что существенно превышает критическую частоту для каждого потенциала; число исходных значений коэффициента отражения $N = 20000$ было выбрано достаточно большим, близким к пределу возможностей не только реального, но и численного эксперимента; разбиение отрезка $[0, 1]$ соответствует $L = 50$ (максимальная размерность возникающей системы линейных уравнений равна 100). На рисунках непрерывной линией изображен исходный потенциал, а пунктирной — реконструированный.

Как можно видеть, удовлетворительные результаты достигаются только для потенциалов величиной порядка 10, а при дальнейшем увеличении потенциала начинается лавинообразный рост погрешности, что делает используемый метод практически неприменимым для больших потенциалов. Заметим, что увеличение N приводит к некоторому уменьшению погрешности для потенциалов величиной порядка 10, однако почти ничего не меняет в картине расхождения для больших потенциалов (порядка 10^3). Величина k_{\max} , если она выбрана выше критической частоты, практически не влияет на погрешность, также не влияют на погрешность увеличение L и повышение точности вычисления исходных данных $R(k_n)$.

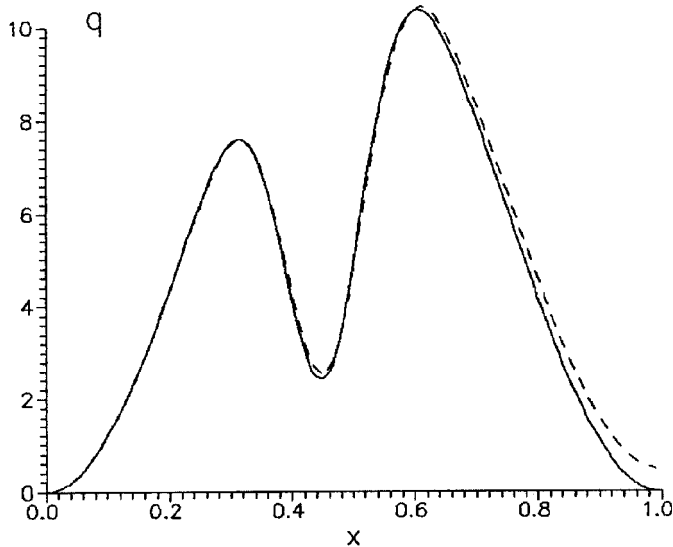


Рис. 1

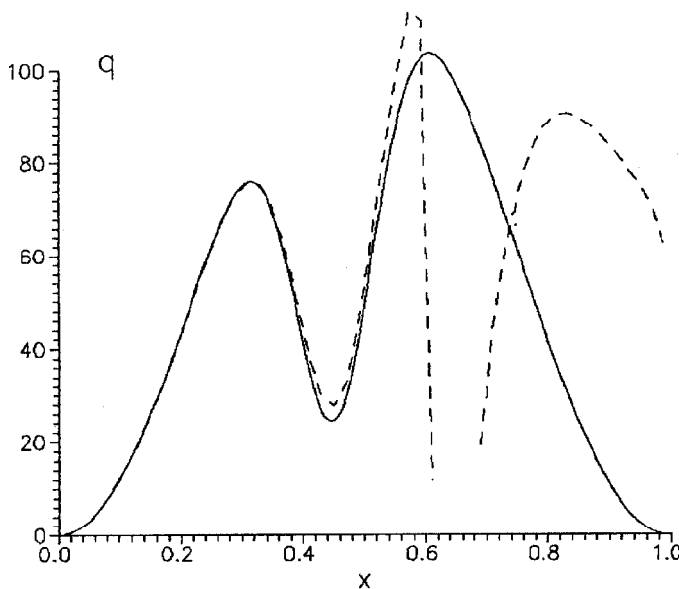


Рис. 2

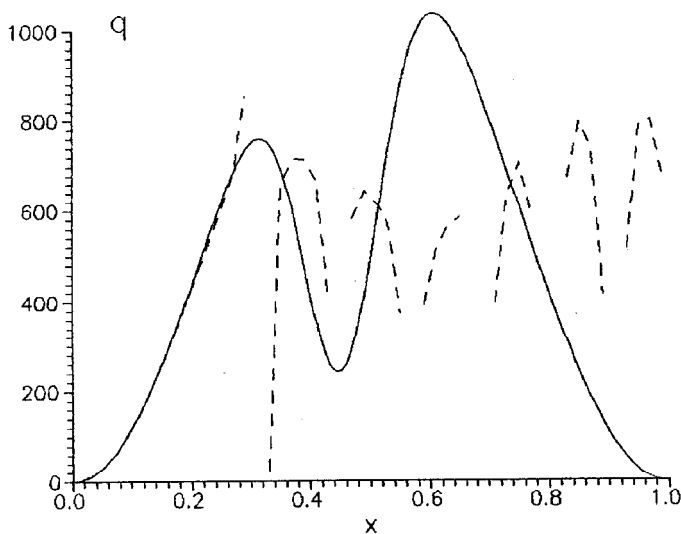


Рис. 3

Если для малых потенциалов прямая задача является практически линейной (борновское приближение), то для больших она становится существенно нелинейной, коэффициент отражения быстро осциллирует, резко возрастает объем вычислений. Так, к примеру, при использовании дробно-рациональной аппроксимации коэффициента отражения [4] число полюсов аппроксимации должно в несколько раз превосходить квадратный корень из величины потенциала, при этом в ходе вычислений должна неоднократно решаться система уравнений порядка, равного этому числу. Более того, задача определения больших потенциалов по коэффициенту отражения, с одной стороны, оказывается «плохо обусловленной» — малым различиям в коэффициентах отражения могут соответствовать большие различия в потенциалах за критической частотой, чем и объясняются трудности при решении ОЗР, наблюдавшиеся в приведенном выше примере. Для больших потенциалов на частотах ниже критической зондирующая волна практически не проникает через потенциальный барьер и коэффициент отражения несет информацию лишь о поведении потенциала до максимума, а на частотах выше критической коэффициент отражения быстро стремится к нулю. При определенных условиях (применимость приближения геометрической оптики, гладкость и монотонный рост потенциала) потенциал может быть восстановлен на участке до главного максимума с помощью преобразования Абеля [6], а если известны коэффициенты отражения с двух сторон, то потенциал может быть восстановлен целиком (в этом случае унимодальность является необходимым условием использования преобразования Абеля). Чтобы исследовать возможность решения ОЗ для немонотонных потенциалов, было построено приближенное решение прямой задачи для потенциалов с долиной.

Рассмотрим достаточно большой по величине действительный потенциал, который вначале монотонно растет, достигает локального максимума, далее следует долина, и затем потенциал вновь монотонно растет. Будем рассматривать частоты, близкие к критической, соответствующей локальному максимуму. Так как потенциал предполагается достаточно большим, то внутри долины на частотах, близких к критической, решение уравнения (1) хорошо описывается приближением геометрической оптики (ВКБ-приближением):

$$u_{\pm}(x, k) = \frac{1}{\sqrt{k^2 - q(x)}} \exp\left(\pm i \int \sqrt{k^2 - q(x)} dx\right). \quad (4)$$

Слева от максимума решение также можно представить в виде суммы двух геометрикооптических решений вида (4) с некоторыми комплексными коэффициентами A_1 и B_1 , а справа от максимума — в виде аналогичной суммы с другими коэффициентами — A_2 и B_2 . Связь же между этими парами коэффициентов, матрица перехода, определяется поведением решений вблизи максимума, где потенциал можно аппроксимировать параболой и для приближенного вычисления матрицы перехода

воспользоваться асимптотиками функций параболического цилиндра [7] $W(a, x)$ при $x^2 \gg a$:

$$W(a, x) \sim \sqrt{\frac{2\kappa}{x}} \cos\left(\frac{x}{4} - a \ln x + \frac{\pi}{4} + \frac{\Phi_2}{2}\right),$$

$$W(a, -x) \sim \sqrt{\frac{2}{\kappa x}} \sin\left(\frac{x}{4} - a \ln x + \frac{\pi}{4} + \frac{\Phi_2}{2}\right),$$

где

$$\Phi_2 = \arg \Gamma\left(\frac{1}{2} + ia\right), \quad \kappa = \sqrt{1 + e^{2\pi a}} - e^{\pi a},$$

$$a = \frac{q(x_1) - k^2}{\sqrt{q''(x_1)/2}},$$

x_1 — положение локального максимума. Из этих асимптотик с учетом того, что $W(a, x)$ и $W(a, -x)$ образуют фундаментальную систему решений, для коэффициента отражения получаем формулу

$$R = -i e^{2i\phi_1} \frac{e^{i\phi_2} \sqrt{1 + e^{-2\pi a}} + e^{-i\phi_2}}{e^{-i\phi_2} \sqrt{1 + e^{-2\pi a}} + e^{i\phi_2}}, \quad (5)$$

где

$$f = \pi/4 + \Phi_2/2 - a/2 + (a/2) \ln a,$$

$$\phi_1 = \theta_1 + f, \quad \phi_2 = \theta_2 + f,$$

θ_1 и θ_2 — геометрикооптические фазы для решений слева и справа от x_1 , f выступает в качестве поправки, устраняющей логарифмическую особенность фаз в (4) на критической частоте.

Для проверки применимости приближения (5) было проведено сравнение производной фазы коэффициента отражения, рассчитанной по этой формуле (штриховая линия на графиках) и найденной путем численного решения прямой задачи (сплошная линия). Соответствующие графики представлены на рис. 4 и 5 (использовался потенциал с долиной типа (3), $h = 10^2$ и $h = 10^5$ соответственно). По оси абсцисс отложены значения волнового числа k , по оси ординат — производная фазы коэффициента отражения по k : $\frac{d(\arg R)}{dk}$. При величине потенциала $h = 10^5$ (рис. 5) обе кривые на графике практически неотличимы друг от друга.

Приближение (5) правильно отражает структуру решения вблизи критической частоты — наблюдается система «резонансов групповых задержек» [8]. Для потенциалов с барьером (перед долиной) величиной порядка 10^2 и более обнаружено хорошее качественное и количественное согласование приближенного решения с численным. Поэтому воспользуемся приближением (5) для анализа возможности решения обратной задачи. При частоте ниже критической по мере уменьшения частоты «резонансные пики» быстро становятся все уже и выше. Оценим высоту и ширину этих пиков. Уже при $a \geq 1$ величина $\xi = e^{-2\pi a}$ будет малой. При $\phi_2 = \pi/2 + \pi n + \delta$, $\delta \ll 1$, производная фазы имеет вид $2 \frac{\partial \phi_2}{\partial k} \frac{\xi}{4\delta^2 + \xi^2/4} + 2 \frac{\partial \phi_1}{\partial k}$ (при $\delta \sim 1$ производная

фазы с точностью до слагаемых порядка ξ равна $2 \frac{\partial \phi_1}{\partial k}$). Форма «резонансов» — лоренцева кривая, максимальное значение равно $2 \frac{\partial \phi_2}{\partial k} \frac{4}{\xi}$, в p раз меньшее значение соответствует $\delta = \xi/(4\sqrt{p})$. Так как $\xi = e^{-2\pi a}$, то при уменьшении k ширина «резонансов» уменьшается, а высота растет с экспоненциальной скоростью. Для того чтобы «резонанс» можно было зарегистрировать, ширина спектра зондирующей волны должна быть по крайней мере сопоставимой с шириной области частот, в которой обнаруживается «резонанс». Пусть Δq — глубина долины, а L — ширина. Оценивая $2 \frac{\partial \phi_2}{\partial k}$ как L и a как $\Delta k/2$, где $\Delta k = \sqrt{q_1} - k$, обозначая $H = q_1 A^2$, получим оценки числа распознаваемых «резонансов» n и относительной глубины долины $\Delta q/q_1$, все резонансы которой могут быть выявлены:

$$n = \frac{2}{\pi^2} \frac{L}{A} \ln\left(\frac{\omega}{\Delta\omega} \frac{A}{L} \frac{1}{\sqrt{Hp}}\right), \quad \frac{\Delta q}{q_1} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\sqrt{H}} \ln\left(\frac{\omega}{\Delta\omega} \frac{A}{L} \frac{1}{\sqrt{Hp}}\right).$$

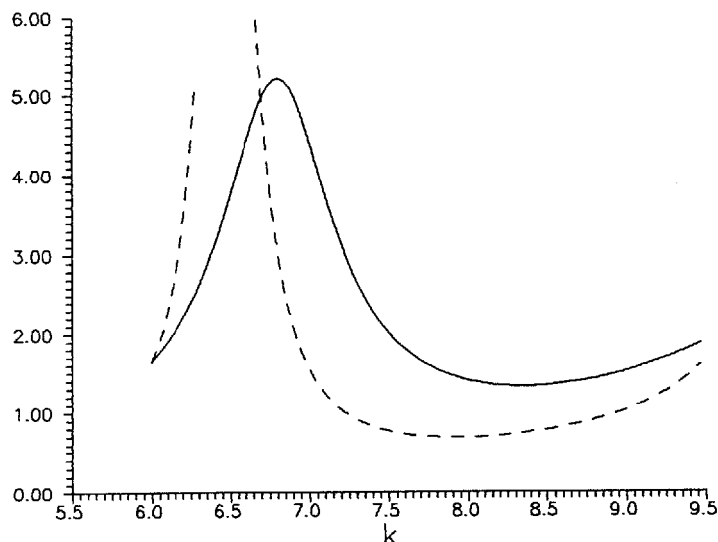


Рис. 4

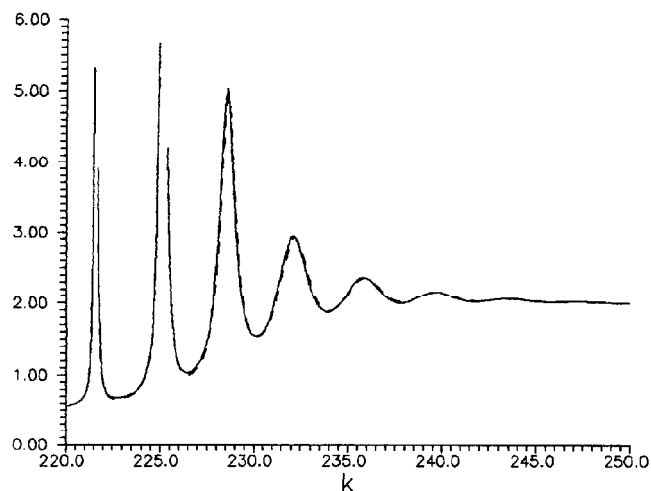


Рис. 5

Для численных оценок положим $p = 1$, $\Delta\omega/\omega = 10^{-6}$, $A/L = 1$, $H = 10^8$ (характерная величина ионосферных потенциалов), тогда $n \approx 2$, $\Delta q/q = 10^{-3}$. Если же положить $\Delta q/q = 0,5$, находим, что H должно быть порядка 10^3 .

Итак, в случае больших потенциалов с долинами коэффициент отражения резко меняется внутри узких частотных интервалов, вне которых с хорошей точностью применимо приближение геометрической оптики без учета долины. Знание положений и параметров «резонансов групповых задержек» может дать дополнительную информацию о потенциале с долиной, однозначное восстановление которого невозможно. Однако для очень толстых плазменных слоев (типа полных ионосферных) реально можно различить лишь несколько первых «резонансов» и приведенные оценки указывают на практическую неразрешимость задачи в случае больших немонотонных потенциалов: если потенциалы имеют фазово-эквивалентные, но различные долины, то заметить разницу между соответствующими коэффициентами отражения практически невозможно, так как она заключается в величине и расположении «резонансов», большинство которых из-за своей малой ширины вообще не наблюдается. Таким образом, при решении ОЗР может возникать принципиальная неоднозначность, связанная с невозможностью на практике получить полную информацию о потенциале. Если же

имеется информация о расположении и ширине всех «резонансов», то на основе предложенного приближения возможно создание методов решения обратной задачи для потенциалов с долинами. Заметим, что поскольку возможность распознавания резонансов ограничивается не величиной потенциала позади долины, а величиной барьера перед нею, то в принципе возможно восстановление ионосферных потенциалов при наличии не слишком больших (10^2 – 10^3) спорадических слоев.

Литература

1. Шадан Л., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М., 1980.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
3. Захарьев Б.Н., Сузько А.А. Потенциалы и квантовое рассеяние: прямая и обратная задачи. М., 1985.
4. Reilly M.H., Jordan A.K. // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1981. **AP-29**, N2. P. 245.
5. Pechenick K.R., Cohen J.M. // J. Math. Phys. 1983. **24**, N2. P. 406.
6. Девис К. Радиоволны в ионосфере. М., 1973.
7. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М., 1979.
8. Куницын В.Е., Усачев А.Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. **30**, №3. С. 267.

Поступила в редакцию
14.02.97