

2. Кураев А.А., Слепян Г.И. // Proc. 1989 URSI Int. Symp. Electromagnetic Theory. Sweden, Stockholm, 1989. P. 210.
3. Хаджи П.И., Федоров Л.В. // ЖТФ. 1991. 61, № 5. С. 110.
4. Bilbault J.M., Michaux B., Kennis P. et al. // Proc. XXV URSI General Assembly. France, Lille, 1996. P. 35.
5. Ведерко А.В., Дубровская О.Б., Марченко В.Ф., Сухоруков А.И. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1992. № 3.

- С. 4 (Moscow University Phys. Bull. 1992. N3. P.5).
6. Кубарев В.А., Черепенин В.А. // Радиотехн. и электроника. 1996. 41. № 7. С. 861.
7. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М., 1979.

Поступила в редакцию  
10.02.97

УДК 519.246,524

## НЕКОГЕРЕНТНОЕ НАКОПЛЕНИЕ СИГНАЛА В ГРАВИТАЦИОННО-ВОЛНОВОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ

М. П. Виноградов, А. В. Гусев, В. К. Милоков

(ГАИШ)

**На основе обобщенного критерия максимального правдоподобия при комплексной системе обработки информации синтезирован некогерентный накопитель всплесков гравитационного излучения. Разработана методика, позволяющая оценить вероятность ошибки первого рода для негауссовского приближения используемой статистики.**

1. Поиск гравитационного излучения от космических объектов представляет собой одну из фундаментальных задач современной экспериментальной физики [1]. В настоящее время наиболее перспективными считаются большебазовые гравитационные антенны, ввод которых в эксплуатацию ожидается в ближайшие годы [2]. Заявленная чувствительность таких антенн в безразмерных единицах вариации метрики достигает величины  $10^{-21} \div 10^{-22}$  в полосе частот  $\Delta f \approx 10^3$  Гц. Чувствительность твердотельных гравитационных антенн веберовского типа существенно ниже:  $10^{-18} \div 10^{-19}$  у криогенных антенн и  $10^{-16} \div 10^{-17}$  у неохлаждаемых. Достоинством неохлаждаемых антенн является их относительная простота и надежность, позволяющая эксплуатировать их в режиме непрерывного мониторинга. Так, например, в момент вспышки Сверхновой SN1987A в рабочем режиме были лишь неохлаждаемые антенны; криогенные антенны с более высокой чувствительностью находились на этапе подготовки к очередному запуску и бездействовали.

Взаимная корреляция (во времени) [3,4] «гравитационных» (в дальнейшем под «гравитационными» событиями будем понимать аномальное поведение выходного сигнала гравитационной антенны) и нейтринных событий в момент вспышки Сверхновой стимулирует дальнейшее развитие оптимальных методов обнаружения полезного сигнала в гравитационно-волновом эксперименте. Комплексная система обработки информации предполагает использование дополнительных результатов астрофизических наблюдений. При этом возникает принципиальная возможность синтеза оптимального адаптивного устройства для обнаружения полезного сигнала, представляющего собой некогерентную импульсную последовательность с неизвестными амплитудами и моментами возникновения отдельных импульсов. Следует отметить, что при обнаружении

некогерентной «пачки» импульсов соотношение оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов обработки оказывается значительно более сложным, чем при приеме моноимпульсного сигнала.

*Цель работы:* Синтез оптимального обнаружителя гравитационного сигнала, разработка методики оценки вероятности ошибки первого рода в условиях, когда невозможно использование гауссовского приближения, широко применяющегося в радиолокационных наблюдениях.

2. Пусть

$$g(t) = g_0(t) \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad t \geq 0$$

— импульсная характеристика твердотельной гравитационной антенны,  $\omega_0$  — ее резонансная частота. Узкополосный процесс

$$X(t) = \lambda S(t) + N(t) \quad (1)$$

на выходе антенны можно представить в виде линейной суперпозиции полезного сигнала:

$$S(t) = \sum_i S_i g_0(t - \tau_i) \cos(\omega_0 t + \chi_i) \quad (2)$$

и стационарного гауссовского шума  $N(t)$ , спектральная плотность  $K(\omega)$  которого предполагается симметричной относительно резонансной частоты  $\omega_0$ :  $K(\omega_0 - \omega) = K(\omega_0 + \omega)$ ,  $|\omega| \ll \omega_0$ .

В выражении (2)  $S_i$  и  $\tau_i$  — амплитуды и моменты возникновения отдельных импульсов в последовательности,  $\chi_i$  — случайные статистически независимые начальные фазы, равномерно распределенные на интервале  $(0, 2\pi)$ ,  $\lambda$  в (1) — случайная величина, принимающая на интервале наблюдения два возможных значения:  $\lambda = 1$  при наличии сигнала,  $\lambda = 0$  при его отсутствии.

Для обнаружения подобного сигнала  $S(t)$  в стационарном гауссовском шуме  $N(t)$  оптимальное решающее устройство («приемник») должно содержать следующие элементы [5]: оптимальный линейный фильтр (ОФ), согласованный с формой  $g(t)$  отдельного импульса; амплитудный детектор, выделяющий огибающую  $R(t)$  узкополосного процесса на выходе ОФ; некогерентный накопитель.

Выходной сигнал  $\theta$  оптимального приемника пропорционален логарифму отношения правдоподобия  $\Lambda(R_1, \dots, R_n)$  [5,6]:

$$\theta = \frac{1}{n} \ln \Lambda(R_1, \dots, R_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i, \quad (3)$$

$$\eta_i = \ln I_0(r_i a_i) - (1/2) a_i^2,$$

где  $n$  — число импульсов в сигнальной последовательности (1),  $R_i = R(t_i)$ ,

$$t_i = \tau_i + \tau_0, \quad (4)$$

$\tau_0$  — задержка, вносимая ОФ,  $I_m(x)$  — модифицированная функция Бесселя  $m$ -го порядка мнимого аргумента,  $r(t) = R(t)/\sigma$ ,  $a(t) = \Lambda(t)/\sigma$ ,  $\Lambda(t)$  и  $\sigma^2$  — огибающая полезного сигнала и дисперсия шума на выходе ОФ,  $r_i = r(t_i)$ ,  $a_i = a(t_i)$ .

Решение о том, что на интервале наблюдения есть полезный сигнал ( $\lambda = 1$ ), принимается, если выполняется следующее условие [5, 6]:

$$\theta \geq C,$$

где пороговый уровень  $C$  определяется выбранным критерием качества.

В гравитационно-волновом эксперименте амплитуды  $a_i$  и моменты  $\tau_i$  возникновения отдельных импульсов априори неизвестны. Для преодоления априорной неопределенности воспользуемся обобщенным критерием максимального правдоподобия [5,7]. В соответствии с этим критерием при синтезе достаточной статистики  $\theta$  (3) вместо неизвестных параметров  $a_i$  и  $\tau_i$  полезного сигнала  $S(t)$  используются их оценки максимального правдоподобия.

3. Максимально правдоподобная оценка  $\hat{a}$  неизвестной нормированной амплитуды  $a$  моноимпульсного сигнала со случайной начальной фазой определяется следующим трансцендентным уравнением [7]:

$$\hat{a} = r \cdot \frac{I_1(r\hat{a})}{I_0(r\hat{a})}.$$

Зависимость  $\hat{a}(r)$  приведена на рисунке. В области  $r \leq 3$  эта зависимость оказывается существенно нелинейной, а при  $r \leq \sqrt{2}$   $\hat{a}(r) = 0$ .

Принимая во внимание выражение (3), находим условие обнаружения некогерентной последовательности  $S(t)$  с неизвестными амплитудами отдельных импульсов:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\eta}_i \geq C,$$

$$\hat{\eta}_i = \ln I_0(r_i \hat{a}_i) - (1/2) \hat{a}_i^2, \quad (5)$$

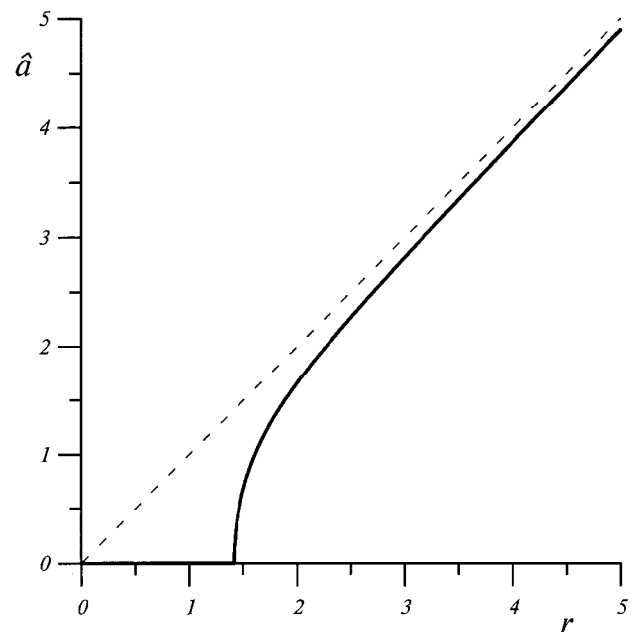
$$\hat{a}_i = \hat{a}(r_i).$$

4. Комплексная система обработки информации дает возможность использовать результаты дополнительных «негравитационных» наблюдений. Так, современные астрофизические сценарии космических катастроф (коллапс и др.) предполагают наличие корреляции между моментами гравитационных  $\tau_i$  и негравитационных астрофизических  $\xi_i$  событий:

$$\tau_i = \xi_i + \tau, \quad i = \overline{1, n_a}, \quad (6)$$

где  $\tau$  — неизвестный временной сдвиг,  $n_a$  — число астрофизических событий на интервале наблюдения.

При дальнейшем анализе будем предполагать, что возможные значения неэнергетического параметра  $\tau$  ограничены априорным интервалом  $(-\tau_p, \tau_p)$ ,  $\tau_p$  — аналог времени разрешения традиционной схемы совпадений [1]. Выбор времени разрешения  $\tau_p$  в эксперименте должен учитывать как особенности астрофизических процессов, сопровождающихся генерацией гравитационного излучения, так и конструктивные особенности экспериментальной установки.



С учетом выражений (4) и (6) имеем

$$r_i = r(t_i = \xi_i + \tau_0 + \tau), \quad i = \overline{1, n_a}. \quad (7)$$

Выражение (7) позволяет рассматривать случайную величину  $\hat{\theta}$  (5) как случайный процесс:

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(\tau), \quad \tau \in (-\tau_p, \tau_p).$$

При неизвестном временном сдвиге  $\tau$  положительное решение о наличии ( $\lambda = 1$ ) полезного сигнала  $S(t)$  принимается, если выполняется следующее условие:

$$\max_{\tau} \hat{\theta}(\tau) = \hat{\theta}(\tau_m) = \hat{\theta}_m \geq C. \quad (8)$$

Значение  $\tau_m$ , соответствующее абсолютному максимуму реализации случайного процесса  $\hat{\theta}(\tau)$  на интервале  $(-\tau_p, \tau_p)$ , определяет максимально правдоподобную оценку  $\hat{\tau} = \tau_m$  неизвестного параметра  $\tau$  [5,7].

5. Вероятность ложной тревоги  $\alpha$ , соответствующая правилу обнаружения (8), определяется выражением [6]

$$\alpha = 1 - F_m(), \quad (9)$$

где  $F_m(x)$  — интегральная функция распределения (ИФР) абсолютного максимума случайного процесса  $\theta(\tau)$  на интервале  $(-\tau_p, \tau_p)$  при «нулевой» гипотезе  $\lambda = 0$ .

Для расчета ИФР  $F_m(x)$  воспользуемся известной методикой [8], основанной на замене непрерывного на интервале  $(-\tau_p, \tau_p)$  случайного процесса  $\theta(\tau)$  дискретной выборкой с независимыми элементами. Так как из некоррелированности отсчетов огибающей узкополосного гауссовского шума следует их статистическая независимость [6], имеем

$$F_m(x) \approx F_\zeta^{M+1}(x - \mu_1), \quad (10)$$

где  $F_\zeta(x)$  — ИФР стационарного случайного процесса,

$$\zeta(\tau) = (\hat{\theta}(\tau) - \mu_1)_{\lambda=0},$$

$\mu_k$  — центральные моменты случайной величины  $\eta_i$  (см. (5)) при «нулевой» гипотезе  $\lambda = 0$ ,  $M = [2\tau_p/\tau_0]$ ,  $[x]$  — целая часть действительного числа  $x$ .

Так как при нулевой гипотезе случайная величина  $r_i$  в выражениях (5) распределена по закону Рэлея с единичной дисперсией, центральные моменты  $\mu_k$  могут быть вычислены при помощи численного интегрирования:

$$\begin{aligned} \mu_1 &\approx 0,204, & \mu_2 &\approx 0,280, \\ \mu_3 &\approx 0,647, & \mu_4 &\approx 2,348. \end{aligned}$$

Для оценки сходимости ИФР  $F_\zeta(x)$  к нормальному закону найдем коэффициенты асимметрии  $\gamma_1$  и эксцесса  $\gamma_2$ :

$$\gamma_1 = (\mu_3/\mu_2^{3/2}) \approx 4,37, \quad \gamma_2 = (\mu_4/\mu_2^2) - 3 \approx 26,95. \quad (11)$$

Сходимость ИФР  $F_\zeta(x)$  к нормальному закону при таких значениях  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  для конечного числа степеней свободы  $n_a$  оказывается слабой, что делает перспективным модельное представление неизвестной плотности вероятности:

$$f_\zeta(x) = \frac{dF_\zeta(x)}{dx}.$$

В качестве возможной аппроксимации  $\hat{f}_\zeta(x)$  плотности вероятности  $f_\zeta(x)$  воспользуемся системой кривых Пирсона [9]

$$\begin{aligned} \hat{f}_\zeta(x) &= \hat{f}_0 \exp\{\Gamma(x)\}, \\ \Gamma(x) &= \int \frac{(x - b_1)}{(b_0 + b_1x + b_2x^2)} dx, \end{aligned}$$

где  $\hat{f}_0$  — масштабный множитель, определяемый из условий нормировки,  $b_i = c_i/d$ .

Коэффициенты  $c_i$  и  $d$  определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} c_0 &= -(\mu_2/n_a)(4\beta_2 - 3\beta_1), \\ c_1 &= -(\beta_2 + 3)\sqrt{\mu_2\beta_1/n_a}, \\ c_2 &= -(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6), \quad d = 10\beta_2 - 12\beta_1 - 18, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — коэффициенты Пирсона:

$$\beta_1 = \gamma_1^2/n_a, \quad \beta_2 = (\gamma_2/n_a) + 3. \quad (13)$$

Тип распределения Пирсона зависит от знака коэффициента  $k = b_1^2/(4b_0b_2)$ . Принимая во внимание выражения (11) и (13), находим

$$k = \frac{\beta_1(\beta_2 + 3)}{4(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)(4\beta_2 - 3\beta_1)} < 0. \quad (14)$$

Условие  $k < 0$  соответствует I типу распределения Пирсона — бета-распределению, параметры  $p$  и  $q$  которого определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} p &= 1 + \frac{1}{u} \left( \frac{u-1}{2b_2} - 1 \right), \\ q &= 1 + \frac{1}{u} \left( \frac{u+1}{2b_2} + 1 \right), \end{aligned}$$

где  $u = \sqrt{1 - k^{-1}}$ .

Следовательно, ИФР  $\hat{F}_\zeta(x)$  может быть представлена в виде

$$\hat{F}_\zeta(x) = B_y(p, q)/B_1(p, q) = I_y(p, q), \quad (15)$$

где  $B_x(p, q)$  — неполная бета-функция [10]:

$$B_x(p, q) = p^{-1}x^p F(p, 1 - q; p + 1; x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$F(a, b; c; x)$  — гипергеометрическая функция,

$$y = y(x) = (2u)^{-1}[(u-1) - 2(c_2/c_1)x].$$

Принимая во внимание выражения (9), (10) и (14), окончательно получим

$$\alpha \approx 1 - I_z^{M+1}(p, q), \quad z = y(c - \mu_1). \quad (16)$$

В приемнике Неймана–Пирсона порог  $C$  выбирается в зависимости от заданной вероятности ложной тревоги  $\alpha$ . Решение трансцендентного уравнения (15) при  $|1 - q| \gg p \gg 1$  заметно упрощается, если воспользоваться асимптотическим представлением гипергеометрической функции  $F(a, b; c; x)$  при  $b \rightarrow \infty$  [10]:

$$F(a, b; c; x) \approx \Phi(a, c; bx),$$

где  $\Phi(a, c; bx)$  — вырожденная гипергеометрическая функция.

Адаптивный алгоритм обнаружения (8) был апробирован на данных высокочастотного («астрофизического») канала баксанского лазерного деформографа

ЛД-1, чувствительность которого в килогерцовом диапазоне частот оказывается соизмеримой с чувствительностью неохлаждаемых твердотельных гравитационных антенн. В качестве временных реперов  $\{\xi_i\}$  были использованы данные о моментах гамма-вспышек по каталогу ЗВ BATSE в сети Internet. Апробация показала эффективность описанного алгоритма.

В заключение отметим, что все основные результаты могут быть распространены на антенную систему, содержащую  $L$  пространственно разнесенных элементов. В этом случае выходной сигнал оптимального приемника  $\theta_L$  определяется выражением

$$\theta_L = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^L \ln \Lambda(R_{j1}, \dots, R_{jn}),$$

где  $R_j(t)$  — огибающая узкополосного процесса на выходе ОФ в  $j$ -м канале,  $j = \overline{1, L}$ .

#### Литература

1. Бичак И., Руденко В.Н. Гравитационные волны в ОТО и проблема их обнаружения. М., 1989.
2. Amaldi E., Badino G., Bologna G., Castagnoli C. et al. // Nuovo Cimento. 1989. C12, N 1. P. 75.
3. Pizella G. Prepr. Nota Interna N932. 1989. Universita di Roma "La Sapienza".
4. Torn K.S. 300 Years of Gravitation. Cambridge, 1987.
5. Сосулин Ю.Г. Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М., 1983.
6. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М., 1983.
7. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. М., 1983.
8. Тихонов В.И. Выбросы случайных процессов. М., 1970.
9. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М., 1982.
10. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, М., 1973.

Поступила в редакцию  
26.02.97