

УДК 539.171

ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ШРЁДИНГЕРА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Е. Г. Барипова, А. Г. Корниенко, А. Р. Френкин, Г. А. Чижов

(кафедра теоретической физики)

Исследованы неэкспоненциальные решения одномерных нелинейных уравнений типа Шрёдингера специального вида, полученные методом квадратур. Впервые даны примеры аналитических решений некоторых из рассматриваемых типов уравнений.

В работах [1, 2] были рассмотрены решения нелинейных уравнений типа Шрёдингера (НУШ)

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + F(|\Psi|)\Psi.$$

Описанию частных решений подобного нелинейного уравнения посвящено значительное число работ, в том числе и обзоров [3, 4]. Следует указать, что в изучении нелинейных уравнений этого типа имеется три четко выраженных направления:

а) исследование нелинейных эффектов в одномерных системах, которые получаются из НУШ при поиске решений специального вида;

б) нахождение решений методом обратной задачи;

в) поиск интегральных преобразований, сводящих НУШ к алгебраической задаче или к известному классу дифференциальных уравнений.

В настоящей работе, как и ранее [1, 2], мы следуем первому направлению. Это обусловлено возможностью сведения НУШ к одномерному дифференциальному уравнению. Структура возникающего в данном подходе уравнения подобна уравнениям, появляющимся при решении одномерных задач классической механики. Несмотря на кажущуюся простоту полученных уравнений и существование полной математической теории, позволяющей сделать некоторые общие утверждения относительно характера решений этих уравнений [5], в нашей работе мы опишем ряд физически интересных примеров. Необходимость рассмотрения таких задач обусловлена появлением в последнее время моделей, содержащих полиномиальные потенциалы, степень которых выше традиционно рассматриваемой четвертой, а также содержащих логарифмические множители. Такие задачи возникают, например, в физике твердого тела при учете дефектов различной природы [6], а также в современных суперсимметричных моделях теории поля [7]. С учетом сказанного мы рассмотрим далее некоторые частные решения НУШ. Заметим, однако, что общим в данном рассмотрении является изложенный нами подход, который с успехом может быть перенесен и на иные типы эффективного потенциала.

Для нахождения решений специального вида

$$\Psi(x, t) = \exp\{i\delta t + ipz\}y(z),$$

описывающих распространение нерасплывающихся пакетов (уединенных волн), где $z = x - Vt$ — фаза, $p = V/2$, а δ — действительное число, был использован метод квадратур. В этом подходе анализ поведения решений сводится к исследованию эффективного потенциала

$$U(y) = U(E_0, |y|) = E_0 y^2 - 2 \int F(|y|) y dy, \quad E_0 = V^2/4 - \delta,$$

соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения

$$y_{zz} + E_0 y - F(|y|)y = 0.$$

Отметим, что применяемый метод не позволяет отличить уединенные волны от солитонов, которые сохраняют свою структуру при взаимодействии друг с другом, так как в методе квадратур постановка такой задачи невозможна. Ее решение требует привлечения метода обратной задачи рассеяния [8, 9], который не известен для рассматриваемых в настоящей работе НУШ. Поэтому для краткости любые решения в виде уединенных волн, получаемые методом квадратур, мы будем называть солитонами, кинками, колебательными или неустойчивыми решениями НУШ.

В данном подходе решениям типа солитона соответствует движение изображающей точки между локальным максимумом эффективного потенциала (точкой остановки) и точкой поворота, решениям типа кинка — движение изображающей точки между двумя соседними точками остановки. Колебательным решениям соответствует движение между двумя точками поворота. Неустойчивые решения — инфинитные, ограниченные одной особой точкой или не имеющие особых точек [2].

Пусть уравнение $E - U(y) = 0$ имеет решение для двух действительных значений $0 \leq y_1 < y_2$, причем $U(y) < E$ в области изменения аргумента $y_1 < y < y_2$. Пусть эффективный потенциал $U(y)$ может быть представлен в виде

$$U(y) = (|y| - y_1)^\mu (|y| - y_2)^\nu f(|y|) + E,$$

где $f(|y|)$ — некоторая функция (обычно полином), не обращающаяся в нуль в интервале $y_1 < y < y_2$.

Рассмотрим целые значения параметров μ, ν . При $\nu = 0$ движение инфинитно и ему соответствуют неустойчивые решения НУШ. Значениям $\mu = \nu = 1$

соответствуют колебательные решения, аналогичные в механике движению между двумя точками поворота. При движении вблизи минимума потенциала этому случаю соответствует линеаризованное (волновое) решение НУШ.

Случаю $\mu = 2$, $\nu = 1$ (и аналогично $\mu = 1$, $\nu = 2$) соответствует обычное солитонное решение НУШ, экспоненциально убывающее при больших фазовых временах. При $1 \leq \nu < 2$ точка y_2 достигается за конечное фазовое время, после чего скорость движения изображающей точки меняет знак. Именно поэтому такую точку называют точкой поворота. При $\nu \geq 2$ достижение границы области y_2 за конечное фазовое время невозможно. Такую точку называют точкой остановки.

При $\mu = 3$, $\nu = 1$ эффективный потенциал $U(y)$ имеет перегиб в точке $y = y_1$. В этом случае закон движения в окрестности особой точки $y = y_1$ является степенным. Соответствующее решение НУШ назовем слабым солитоном. Асимптотическое поведение слабого солитона при больших фазовых временах (т.е. вблизи точки поворота) имеет вид $\Psi \sim (z - z_0)^{-2}$.

В качестве примера рассмотрим сепаратрисное решение НУШ

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - 2\beta |\Psi| \left(|\Psi| - \frac{3}{4} \right) \Psi, \quad \beta > 0,$$

для которого соответствующий эффективный потенциал обыкновенного дифференциального уравнения $U(y) = \beta |y|^3 (|y| - 1) + E_0 y^2$. Выбираем параметр задачи E_0 так, чтобы в потенциале $U(y)$ не было квадратичного по y члена. Сепаратрисе соответствует значение постоянной $E = 0$. Квадратура дает решение НУШ в виде двух слабых солитонов (левого и правого), отличающихся знаком:

$$\Psi(x, t) = \mp \left(1 + \frac{\beta}{4} (z - z_0)^2 \right)^{-1} \exp\{i(px - \mathcal{E}t)\}, \quad \mathcal{E} = p^2.$$

Точкам поворота здесь соответствует фазовое время $z - z_0 = 0$.

Подобным степенным поведением обладают и другие слабые солитоны, для которых $\mu > 2$, $\nu = 1$:

$$\Psi \sim |z - z_0|^{2/(2-\mu)}.$$

Примерный вид потенциала $U(y)$ и фазовый портрет для слабых солитонов изображены на рис. 1.

Специально отметим, что при $y \rightarrow 0$ для слабых солитонов $y_z \sim |y|^{\mu/2}$ ($\mu > 2$) в отличие от обычных солитонов, для которых $y_z \sim |y|$ при $y \rightarrow 0$. При $\mu = \nu = 2$ сепаратрисные решения НУШ при больших фазовых временах экспоненциально стремятся к y_1 , y_2 (или к $-y_1$, $-y_2$). Это экспоненциальные кинки — правый и левый.

При $|\Psi| > y_2$ на сепаратрисе $E = U(y_1) = U(y_2)$ имеется неустойчивое решение НУШ с поведением вида $|\Psi| \sim |z - z_0|^{-1}$ при больших фазовых временах.

Отметим, что если $U - E = 0$ только в одной точке $y_1 > 0$, то в силу симметрии (четности) потенциала $U(y)$ равенство выполняется и в точке $y = -y_1 < 0$.

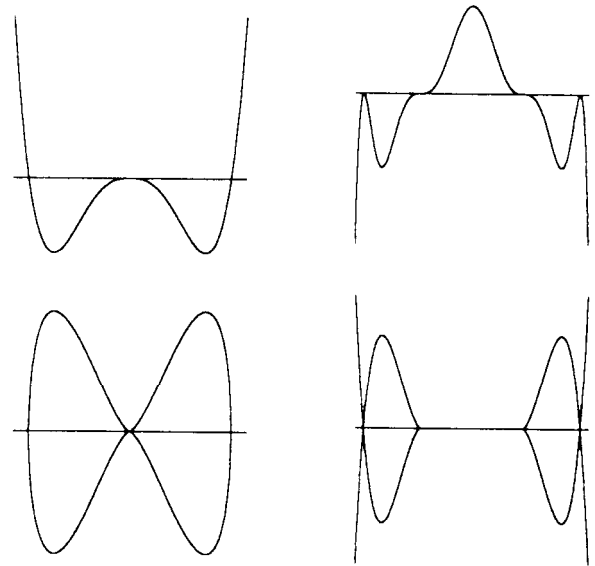


Рис. 1. Слабые солитоны

Рис. 2. Слабые (степенные) кинки

Тогда при $\mu = 1$ точки $y = \pm y_1$ являются точками поворота и решение НУШ имеет осциллирующий характер, если $U(y) < E$ при $0 < |y| < y_1$.

При $\mu \geq 2$ ($\nu = 0$) существует решение НУШ в виде кинки, причем $|\Psi| \leq y_1$. В этом случае эффективный потенциал $U(y)$ может быть представлен в виде $U(y) = (|y| - y_1)^\mu f(y)$, где $U(y) < U(y_1)$ при $0 < |y| < y_1$. Заметим, что для произвольного эффективного потенциала число солитонных решений — четное, а число кинков может быть как четным, так и нечетным.

В случае $\mu = 3$, $\nu = 2$ НУШ имеет решение в виде слабых (степенных) кинков (левого и правого), аналогично случаю $\mu = 3$, $\nu = 1$ для солитонов. При $y \rightarrow y_1$ $y_z \sim |y - y_1|^{3/2}$.

Примерный вид потенциала и фазовый портрет приведены на рис. 2.

При $|\Psi| > y_2$ имеется также неустойчивое сепаратрисное решение НУШ с поведением $|\Psi| \sim |y - y_1|^{-2/3}$ при больших фазовых временах.

При $\mu = 3$, $\nu = 0$ НУШ имеет решение в виде одиночного слабого (степенного) кинка. Например, для потенциала $U(y) = \beta(y^2 - 1)^3$ параметр задачи (коэффициент при y^2) $E_0 = 3\beta$, а соответствующее НУШ имеет вид

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - 3\beta |\Psi|^2 (|\Psi|^2 - 2) \Psi.$$

На сепаратрисе (при $E = \beta$) НУШ имеет решение в виде одиночного слабого кинка:

$$\Psi(x, t) = \frac{\beta^{1/2} (z - z_0)}{\sqrt{1 + \beta (z - z_0)^2}} \exp\{i(px - \mathcal{E}t)\}, \quad \mathcal{E} = E_0 + p^2.$$

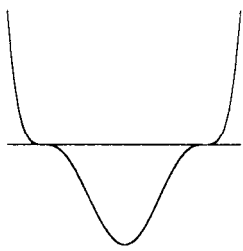


Рис. 3. Одиночный слабый кинк

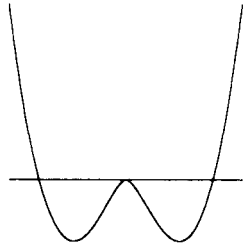


Рис. 4. Сверхсолитоны

Потенциал и фазовый портрет приведены на рис. 3.

Приведенные примеры подтверждают, что поведение решения НУШ определяется характером особых точек, а точнее значением второй производной эффективного потенциала $U''(y)$ в этих точках. Если в особой точке $U''(y) = 0$, то этому случаю соответствует слабое (степенное) поведение решений НУШ типа солитонов и кинков. Однако возможны случаи, когда в особой точке $U''(y) \rightarrow -\infty$. Тогда изображающая точка с большой скоростью подходит к особой точке, что соответствует более быстрому, чем экспонента, спадаанию $|\Psi|$ при больших фазовых временах. Подтвердим сказанное примерами.

Рассмотрим потенциал вида $U(y) = U(|y|) = (E_0 - \beta)y^2 + 2\beta y^2 \ln |y|$ ($\beta > 0$), который имеет специфическую особенность в точке $y = 0$: $U(0) = 0$, $U'(0) = 0$, а вторая производная потенциала в нуле имеет логарифмическое поведение. Данному потенциалу соответствует НУШ вида

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - 2\beta \Psi \ln |\Psi|.$$

В окрестности точки $y = 0$ $\frac{dy}{dz} \sim -\ln^{1/2} \frac{1}{|y|}$, что отличает этот случай от обычных и слабых солитонов, для которых $\frac{dy}{dz} \sim |y|^{(\mu-2)/2}$ при $y \rightarrow 0$ ($\mu \geq 2$). Точные решения НУШ на сепаратрисе ($E = 0$) для произвольного значения параметра E_0 , имеющие вид [10]

$$\Psi(x, t) = \mp \exp \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E_0}{\beta} \right) \right\} \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} (z - z_0)^2 \right\} \times \exp \{ i(px - \mathcal{E}t) \},$$

где $\mathcal{E} = E_0 + p^2$, будем называть сверхсолитонами (левым и правым). Потенциал и фазовый портрет приведены на рис. 4.

Заметим, что существуют НУШ с решениями, спадающими быстрее сверхсолитонных при больших фазовых временах. В этом случае в точке $y = 0$ вторая производная эффективного потенциала должна изменяться быстрее, чем $\ln |y|$ при $y \rightarrow 0$. Например, когда эффективный потенциал $U(y)$ имеет вид, сходный с приведенным на рис. 4, однако в окрестности точки $y = 0$ меняющийся по закону $U(y) \sim -y^2 \ln^{2-2/n}(|y|^{-1})$, $n > 2$, сепаратрисное ($E = 0$) решение НУШ при больших фазовых временах имеет асимптотику

$$|\Psi| \sim \exp(-\gamma(z - z_0)^n), \quad \gamma > 0.$$

В заключение еще раз обратим внимание на используемую терминологию. Хотя мы и употребляем для краткости термины «солитон» и «кинк» для уединенных волн, все рассмотренные нами слабые (степенные) решения и сверхсолитоны являются лишь уединенными волнами. Этот вывод следует из того, что метод обратной задачи рассеяния, используемый для нахождения солитонных решений нелинейных уравнений, автоматически приводит к экспоненциальному убыванию безотражательного потенциала на бесконечности [11].

Мы продемонстрировали возможность существования новых типов решений одномерных НУШ. Возможно, решения такого типа могут иметь место при описании доменных стенок в моделях ферромагнетиков или при описании спиновых стекол. В этом случае было бы интересным нахождение реальных проявлений этих решений в соответствующих физических экспериментах. Сами решения по своей математической структуре допускают такую возможность, что делает их не только весьма интересными с математической точки зрения, но и потенциально возможными для реального наблюдения.

Литература

1. Корниенко А.Г., Тернов И.М., Френкин А.Р., Чижов Г.А. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1995. № 4. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1995. No. 4. P. 1).
2. Корниенко А.Г., Френкин А.Р., Чижов Г.А. // Там же. 1997. № 5. С. 10 (Ibid. 1997. No. 5).
3. Makhankov V.G., Fedyanin V.K. // Phys. Rep. 1984. **104**, No. 1. P. 1.
4. Белова Т.И., Кудрявцев А.Е. // УФН. 1997. **167**, № 4. С. 377.
5. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск, 1972.
6. Морозов А.И., Сигов А.С. // УФН. 1994. **164**, № 3. С. 243.
7. Кетов С.В. Нелинейные сигма-модели в квантовой теории поля и теории струн. Новосибирск, 1992.
8. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М., 1986.
9. Маханьков В.Г., Рыбаков Ю.П., Санюк В.И. // УФН. 1994. **164**, № 2. С. 121.
10. Корниенко А.Г. Дипломная работа. М. (физ. ф-т МГУ), 1995.
11. Гостев В.Б., Френкин А.Р. // ТМФ. 1985. **62**, № 3. С. 472.

Поступила в редакцию
16.06.97