где

$$I_\perp = \pi^{2-\zeta+\varepsilon}\Gamma^{-1}(\varepsilon-\zeta+2)\int\limits_0^\infty d\omega^2\,(\omega^2)^{\varepsilon-\zeta+1}\times \\ \times\left[F(p^2+\omega^2,pk_i)-\sum_{l=0}^{\zeta-3}\frac{(\omega^2)^l}{l!}F^{(l)}(p^2,pk_i)\right]. \tag{17}$$

По терминологии Вильсона, формула (17) представляет собой не что иное, как определение интеграла от функции $F(p^2+\omega^2,pk_i)$ по «поперечному пространству» нецелой размерности $2(\varepsilon-\zeta+2)$. В свою очередь формула (16) определяет $I(\varepsilon)$ как интеграл по «продольному пространству» целой положительной размерности 2ζ от $I_\perp(p)$. Совместно формулы (16) и (17) задают $I(\varepsilon)$ как интеграл нецелой размерности $4+2\varepsilon$ от функции $F(p,k_i)$. Поэтому при желании можно воспользоваться хорошо разработанной техникой интегрирования по пространствам нецелой размерности. Надо только иметь в виду, что каждое такое интегрирование будет проводиться со своим значением ε (ε_1, ε_2 и т.д.). Для перехода к физической размерности нужно к полученному результату последовательно применять операции $\mathcal{L}(\varepsilon_2\downarrow 0)$, $\mathcal{L}(\varepsilon_1\downarrow 0)$ и т.д.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-00726).

Литература

1. *'tHooft G., Veltman M.* // Nucl. Phys. 1972. **B44**. P.189
2. *Славнов Д.А.* // ТМФ. 1997. **110**. С.399.
3. *Боголюбов Н.Н., Парасюк О.С.* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. **20**. С.585.
4. *Ильин В.А., Имашев М.С., Славнов Д.А.* // ТМФ. 1982. **52**. С.177.
5. *Славнов Д.А.* // ТМФ. 1985. **62**. С.335.
6. *Weinberg S.* // Phys. Rev. 1960. **118**. P.838.
7. *Славнов Д.А.* // ТМФ. 1973. **17**. С.169.
8. *Wilson K.G.* // Phys. Rev. 1973. **D7**. P.2911.
9. *Коллинз Дж.* Перенормировка. М., 1988.

Поступила в редакцию
06.06.97

УДК 530.12:531.51

ФИНСЛЕРОВА ИНВАРИАНТНАЯ И КООРДИНАТНАЯ ДЛИНА В ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

Г. С. Асанов

(кафедра теоретической физики)

Определены временные и пространственные масштабы в инерциальных системах отсчета на основе финслеровой инвариантности, указана соответствующая финслерова метрическая функция и вычислены финслеровы коэффициенты деформаций.

Продолжая работы [1–2] и используя принятые в них обозначения, рассматриваем две системы отсчета S_0 и $S(v)$ и используем финслеровы кинематические преобразования:

$$T = H^0_{(0)}t + H^0_{(1)}x, \\ X = H^1_{(0)}t + H^1_{(1)}x, \quad Y = H^2_{(2)}y, \quad Z = H^3_{(3)}z \tag{1}$$

или их векторное представление

$$X^P = H^P_{(Q)}x^Q, \tag{2}$$

где $X^P=(T,X,Y,Z)$ относятся к S_0 и $x^P=(t,x,y,z)$ относятся к $S(v)$; $P,Q,R = 0,1,2,3$. Справедливо тетрадное представление

$$g_{PQ}(v) = \sum_{R=0}^{3} q_R H^{(R)}_P(v)H^{(R)}_Q(v) \tag{3}$$

для финслерова метрического тензора, где

$$q_P = (1,-1,-1,-1) \tag{4}$$

в соответствии с пространственно-временной сигнатурой тензора g_{PQ}. Явные выражения для компонент $[H^P_{(Q)}(v), H^{(Q)}_P(v)]$ указаны в работе [1]. Мы ограничимся случаем $j=1$.

Кинематические преобразования (1)–(2) имеют чисто пассивный смысл: они задают правила изменения компонент векторов при переходе из S_0 в $S(v)$. Физической причиной эих изменений является деформация собственных масштабов (эталонов времени и длины) в системе отсчета $S(v)$ вследствие ее движения относительно системы отсчета S_0. При этом сами четырехмерные векторы $[X^P]$ остаются неизменными, сохраняют свое направление в четырехмерном пространстве-времени.

Как и в [1, 2], мы предполагаем, что x^1-ось и X^1-ось систем отсчета S_0 и $S(v)$ параллельны и что у трехмерного вектора скорости $\mathbf{v}$ компоненты v^2 и v^3 равны нулю, и используем обозначение $v=v^1$, так что $S(v)$ движется вдоль x^1-оси, если $v>0$, и против — если $v<0$.

Определение

$$||X||_{S(v)} \stackrel{\text{def}}{=} g_{PQ}(v)X^PX^Q \tag{5}$$

задает координатную длину вектора X^P относительно системы отсчета $S(v)$. Используя преобразования (2)–(4), получим

$$||X||_{S(v)} = (x^0)^2 - |\mathbf{x}|^2,$$
$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}. \tag{6}$$

Поэтому справедливо

Предложение 1. В $S(v)$ координатная длина четырехмерных векторов определяется обычным псевдоевклидовым правилом (6) независимо от финслерова обобщения.

Фактически это утверждение является прямым следствием пространственно-временной сигнатуры (4) финслерова метрического тензора. Можно также сказать, что пространство наблюдений в системе отсчета $S(v)$ является псевдоевклидовым. Поскольку $g_{PQ}(v=0) = q_P\delta_{PQ}$ (следствие равенств (3) и (4)), то определение (6) совпадает с определением (5) в самой выделенной системе отсчета S_0. Такого совпадения нет в системе отсчета $S(v)$ при финслеровом обобщении.

В то же время $S(v)$-координатная длина (5) не инвариантна относительно финслеровых кинематических преобразований (1)–(2), ибо они более общие, чем лоренцевы.

Пусть теперь существует финслерова метрическая функция $F(T, \mathbf{X})$, инвариантная относительно преобразований (1)–(2), так что

$$F(T, \mathbf{X}) = F(t, \mathbf{x}). \tag{7}$$

Назовем

$$||X||_F \stackrel{\text{def}}{=} F(X^0, \mathbf{X}) \tag{8}$$

F-длиной четырехмерного вектора (X^P). Согласно (7) она инвариантна относительно кинематических преобразований (1)–(2). Это свойство инвариантности F-длины позволяет использовать ее для согласования масштабов времени и длины в различных системах отсчета.

Действительно, пусть $(\widetilde{X}^P)$ и $(\widetilde{\widetilde{X}}^P)$ — два времениподобных вектора. В собственных системах отсчета они имеют компоненты $(\widetilde{x}^0, 0, 0, 0)$ и $(\widetilde{\widetilde{x}}^0, 0, 0, 0)$ соответственно. Величины $\widetilde{x}^0$ и $\widetilde{\widetilde{x}}^0$ имеют физический смысл собственных промежутков времени. Поскольку

$$F(x^0, 0, 0, 0) \equiv x^0 \tag{9}$$

(как следствие инвариантности (7)), то справедливы равенства

$$\widetilde{x}^0 = F(\widetilde{X}^P), \qquad \widetilde{\widetilde{x}}^0 = F(\widetilde{\widetilde{X}}^P). \tag{10}$$

Итак, мы видим, что верно

Предложение 2. Финслерова F-длина времениподобного вектора имеет ясный физический смысл: она равна собственному времени, соответствующему этому вектору. В частности, как следствие (10), равенство $\widetilde{x}^0 = \widetilde{\widetilde{x}}^0$ собственных промежутков времени имеет место тогда и только тогда, когда равны F-длины векторов, т. е. когда

$$F(\widetilde{X}^P) = F(\widetilde{\widetilde{X}}^P). \tag{11}$$

Собственное время определяется инвариантной финслеровой F-длиной (которая отлична от $S(v)$-координатной длины). Справедливо тождество

$$F(T, 0) = T. \tag{12}$$

Нас теперь интересует альтернативная

Проблема. Какой инвариантный смысл следует придать понятию «отрезки равной длины в системе отсчета $S(v)$»?

Рассмотрим в $S(v)$ отрезок на x^1-оси и обозначим через x его длину. Он геометрически представляется четырехмерным вектором $x^p = (0, x, 0, 0)$. Преобразуя этот вектор из $S(v)$ в S_0 согласно закону (1), получим

$$T = xv/V(v), \qquad X = x(1 - g|v|)/V(v) \tag{13}$$

(использованы формулы (59) из [1]). Если F — финслерова метрическая функция, относящаяся к такому случаю, то должно выполняться равенство

$$F(T, X) = xF(v,\, 1 - g|v|)/V(v). \tag{14}$$

По своему физическому смыслу понятие инвариантной пространственной длины предполагает равенство

$$x = F(T, X) \tag{15}$$

(ср. (10)). Вследствие (15) равенство (14) возможно тогда и только тогда, когда функция F удовлетворяет тождеству

$$F(v,\, 1 - g|v|) = V(v). \tag{16}$$

Наиболее полное соответствие с обычными представлениями в системе отсчета S_0 будет достигаться, когда выполняется еще и тождество

$$F(0, \mathbf{X}) = |\mathbf{X}|, \qquad |\mathbf{X}| = \sqrt{(X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2} \tag{17}$$

(мы считаем $F > 0$). Условия (17) и (12) аналогичны друг другу.

В работе [1] из условия инвариантности (7) была выведена финслерова метрическая функция $F(T, \mathbf{X})$ для случая времениподобных векторов (X^P), для которых $|\mathbf{X}|/|T| < g_+$. Именно эту функцию следует использовать в (8)–(12). Метод вывода, использованный в [1], применим и к случаю, когда векторы (X^P) простраственноподобны, т. е. когда $|\mathbf{X}|/|T| > g_+$. Опуская вывод и вычисления, приведем полученный результат:

$$F(T, \mathbf{X}) = (|\mathbf{X}| - g_+|T|)^{g_+/2A}(|\mathbf{X}| - g_-|T|)^{-g_-/2A},$$
$$|\mathbf{X}|/|T| > g_+. \tag{18}$$

Полагая

$$F(T, \mathbf{X}) = |\mathbf{X}|Z(q), \quad q = |T|/|\mathbf{X}| < 1/g_+, \tag{19}$$

находим соответствующую производящую функцию:

$$Z(q) = (1 - g_+q)^{g_+/2A}(1 - g_-q)^{-g_-/2A}. \tag{20}$$

Поскольку $Z(0) = 1$, то из (19) следует, что справедливо

Предложение 3. При выборе (18) тождество (17) выполняется.

Удовлетворяет ли функция (18) тождеству (14)? Проверяем: $1 - g|v| - g_{\pm}|v| = 1 - (g_{\pm} + g)|v| = 1 + g_{\mp}|v|$ (использована формула (36) из [1]). Следовательно, левая часть в (14) будет равна функции $(1+g_-|v|)^{g_+/2A} \times (1 + g_+|v|)^{-g_-/2A}$. Но последняя функция есть в точности $V(v)$ (см. (34) в работе [1]).

Итак, мы доказали, что справедливо

Предложение 4. При использовании финслеровой метрической функции (18) тождество (14) удовлетворяется во всей области $|v| < g_+$.

Предложение 5. Финслерова метрическая функция (18) определяет инвариантную пространственную длину в соответствии с (15).

Если $(\widetilde{X}^p)$ и $(\widetilde{\widetilde{X}}^P)$ — два вектора в $(q < g_+)$-области, то соответствующие им собственные пространственные длины равны тогда и только тогда, когда $F(\widetilde{X}^P) = F(\widetilde{\widetilde{X}}^P)$, т.е. условие вида (11) применимо и в этом случае. Итак, мы дали полное решение сформулированной выше проблемы.

Интересно еще рассмотреть в $S(v)$ вектор $x^P = (0, 0, y, 0)$, т.е. элемент длины y на x^2-оси в $S(v)$. Используя (1), получим $Y = y/d(v)$ ($d(v)$ — функция, найденная в [1] и задаваемая формулой (39) из [1]). Согласно (17) $F(0, Y) = Y$. Следовательно, мы доказали

Предложение 6. F-инвариантная длина отрезка, перпендикулярного направлению трехмерного вектора скорости $\mathbf{v}$, не деформируется.

Предложение 7. $S(v)$-координатные длины x и y равны в F-инвариантном смысле тогда и только тогда, когда

$$Y = d(v)x. \tag{21}$$

Напротив, $S(v)$-инвариантные длины x и y равны в системе отсчета $S(v)$, когда просто $x = y$, а $S(v)$-координатная длина y деформируется (по закону $y = d(v)Y$, где $d(v) \neq 1$ при финслеровом подходе) в результате движения системы отсчета $S(v)$ относительно системы отсчета S_0. Поэтому предложения 6 и 7 необходимо иметь в виду при внимательном анализе соответствующих релятивистских экспериментов.

Введем следующее

Определение. Пусть L — трехмерная поверхность в системе отсчета $S(v)$, образованная концами отрезков, выходящих из начала координат (из точки (0,0,0,0)) системы отсчета $S(v)$. Если каждой точке $(x, y, z) \in L$ отвечает одинаковая F-инвариантная длина R, то L называется поверхностью равной F-инвариантной длины R в $S(v)$ или, для краткости, R-поверхностью в $S(v)$.

Отличие финслерова параметра g от нуля приводит к такому эффекту, что R-поверхность перестает быть (привычной) сферой!

Чтобы получить уравнение для R-поверхности, мы должны рассмотреть в $S(v)$ пространственноподобные векторы $x^P = (0, x, y, z)$ и преобразовать их в систему отсчета S_0 по закону (1), а затем вычислить величину $q = |T|/|\mathbf{X}|$, что дает

$$q = q(g; v, \theta) = |v\cos\theta|/[Q(v) + (v^2 - g|v| + g^2v^2)\cos^2\theta]^{1/2}. \tag{22}$$

Мы используем обозначения

$$r = [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}, \qquad x = r\cos\theta. \tag{23}$$

Подставляя (22) в (20), мы из (19) найдем, что справедливо

Предложение 8. Уравнение R-поверхности в $S(v)$ имеет вид $r = r(\theta)$, где

$$r(\theta) = RV(v)/[(1 - g|v|)Z(q)\cos\theta]. \tag{24}$$

В случае $q \ll 1$ функция (20) разлагается следующим образом:

$$Z(q) = 1 + gq - \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{6}gq^3 - \frac{1}{8}\left(1 + \frac{2}{3}g^2\right)q^4 + O(5), \tag{25}$$

$$Z^2(q) = 1 + 2gq - q^2 - \frac{2}{3}gq^3 + \frac{1}{6}g^2q^4 + O(5), \tag{25a}$$

так что учет лишь низшей поправки по g в функции (19) даст приближенное выражение

$$F^2(T, \mathbf{X}) = \mathbf{X}^2 - T^2 + 2g|\mathbf{X}||T|, \tag{26}$$

представляющее собой ближайшее финслерово обобщение обычного лоренцева определения длины $|\mathbf{X}|^2 - T^2$ пространственноподобных векторов. Если подставить (1) в (26) и затем использовать (23), то получится представление

$$F^2(T, \mathbf{X}) = r^2(\theta)[1 - g|v|(1 - |\cos\theta|)^2], \tag{27}$$

из которого следует, что в таком низшем приближении функция (24) может быть взята в простом виде

$$r(\theta) = n(\theta)R, \qquad n(\theta) = 1 + \frac{1}{2}g|v|(1 - |\cos\theta|)^2. \tag{28}$$

Из (28) прямо следует, что

$$r(0) = R, \quad n(0) = 1, \tag{29}$$

$$r(\theta) = r(\theta + \pi), \tag{30}$$

и функция

$$u(\theta) \overset{\text{def}}{=} r\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)/r(\theta) \tag{31}$$

равна

$$u(\theta) = 1 + \frac{1}{2}g|v|[2(|\cos\theta| - |\sin\theta|) - \cos^2\theta + \sin^2\theta)]. \tag{32}$$

Если воспользоваться выражением

$$c(\theta) = 1 + \frac{1}{2}g|v|(1 + \cos^2\theta) \tag{33}$$

для скорости светового сигнала (формула (49) в работе [2]), то из (28) получим

$$n(\theta)/c(\theta) = 1 - g|v||\cos\theta|, \tag{34}$$

а функция

$$p(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} [c(\theta)]^{-1} - u(\theta)\left[c\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]^{-1} \tag{35}$$

упростится и примет вид

$$p(\theta) = g|v|(|\sin\theta| - |\cos\theta|) \tag{36}$$

(использована формула (32)). Справедливо равенство

$$p(\theta) = -p\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right), \tag{37}$$

а также

$$c(\theta+\pi) = c(\theta+2\pi) = c(\theta), \quad c\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right) = c\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right). \tag{38}$$

Функция (22) может быть представлена в виде

$$q = |v\cos\theta| c(\theta). \tag{39}$$

Равенство (30) указывает на «равноправность взаимно-противоположных направлений в системе отсчета $S(v)$», т.е. справедливо

Предложение 9. При поворотах отрезков на 180° их F-длина не изменяется.

Из (28) следует сделать вывод, что $n(\theta)$ является «коэффициентом деформации отрезков x^1-оси при повороте на угол θ». Другими словами, как следствие (28) и (29), справедливо

Предложение 10. Если на x^1-оси в $S(v)$ находится отрезок длиной x, то после поворота на угол θ его F-длина должна измениться и стать равной

$$s(\theta) = n(\theta)x. \tag{40}$$

Ясен и смысл функции (31): она является коэффициентом деформации отрезка, составляющего угол θ с x^1-осью, при повороте отрезка на угол 90°, т.е. справедливо

Предложение 11. Если отрезок в $S(v)$ составляет угол θ с x^1-осью и имеет длину $l(\theta)$, то после поворота на угол 90° его F-длина должна измениться и стать равной $l(\theta+\pi/2)$ согласно равенству

$$l(\theta+\pi/2) = u(\theta)l(\theta). \tag{41}$$

Применим полученные формулы к анализу эксперимента типа Майкельсона–Морли. Пусть в $S(v)$ имеется отрезок длиной l_1 под углом θ к x^1-оси и отрезок длиной l_2 под углом $(\theta+\pi/2)$ к x^1-оси. Отрезки опираются на точку $C = (0,0,0,0)$ (центр в $S(v)$) и перпендикулярны друг другу. Из точки C выходят два световых сигнала, один сигнал идет вдоль l_1-отрезка, в конце его отражается обратно и возвращается в точку C, а другой сигнал совершает аналогичный путь вдоль l_2-отрезка. Обозначим через τ разность времени хода этих сигналов. Повернем l_1l_2-систему на угол 90° и повторим опыт. Обозначим через τ' соответствующую новую разность времени хода. Имеем

$$\tau = \frac{l_1}{c(\theta)} + \frac{l_1}{c(\theta+\pi)} - \frac{l_2}{c(\theta+\pi/2)} - \frac{l_2}{c(\theta+3\pi/2)},$$

$$\tau' = \frac{l_1u(\theta)}{c(\theta+\pi/2)} + \frac{l_1u(\theta)}{c(\theta+3\pi/2)} - \frac{l_2u(\theta+\pi/2)}{c(\theta+\pi)} - \frac{l_2u(\theta+\pi/2)}{c(\theta+2\pi)}.$$

Использование формул (35)–(38) сразу дает простой результат:

$$\frac{1}{2}(\tau-\tau') = (l_1+l_2)p(\theta), \qquad p(\theta) = g|v|(|\sin\theta| - |\cos\theta|). \tag{42}$$

В частности,

$$\frac{1}{2}(\tau-\tau') = \begin{cases} -(l_1+l_2)g|v|, & \text{если } \theta = 0, \\ 0, & \text{если } \theta = 45°, \\ (l_1+l_2)g|v|, & \text{если } \theta = 90°. \end{cases} \tag{43}$$

Формулы (42)–(43) указывают на существенную анизотропию финслерова эффекта.

Финслерова функция $Z(q)$ (формула (20)) относится к случаю пространственноподобных векторов X^P. Ее аналогом для случая времениподобных векторов X^P является функция $V(v)$ (даваемая формулой (34) в работе [1]). В римановом (псевдоевклидовом) пределе мы имеем $Z(q)_{|g=0} = \sqrt{1-(T/|\mathbf{X}|)^2}$ и $V(v)_{|g=0} = \sqrt{1-(|\mathbf{X}|/T)^2}$.

Функции $Z(q)$ и $V(v)$ разительно отличаются характером разложения по своим аргументам, соответственно по $q \ll 1$ и по $v \ll 1$, а именно: финслеровы поправки входят в разложение функции $V(v)$ по v начиная только с членов $O(gv^3)$, т.е. с весьма высокого порядка малости, в то время как согласно (25) в разложение функции $Z(q)$ финслеровы поправки входят уже начиная с членов самого низшего порядка $O(gq)$! Именно последняя причина вызвала появление $O(gv)$-поправок в формулах (26)–(36). Наличие таких поправок, резкое отличие в характере разложения функций $Z(q)$ и $V(v)$ — факты, которые едва ли можно было бы «предвидеть» до нахождения явного вида функции $Z(q)$ (формула (20)). Общей чертой в разложениях обсуждаемых функций является только то, что $Z(q)$ не содержит поправок типа $O(gq^2)$, а $V(v)$ не содержит поправок типа $O(gv^2)$.

В совокупности доказанные выше предложения 1–11 дают подробный ответ на вопрос, «как возникают финслеровы деформации временных и пространственных масштабов», и предлагают замкнутые и достаточные аналитические средства для их вычисления. В частности, предложения 9–11 указывают на простые поправки на $O(gv)$-уровне, которые необходимо учитывать при внимательном финслеровом анализе известных релятивистских экспериментов (см., напр., [3, 4]), при предсказании новых пост-лоренцевых релятивистских экспериментов. Так, например, появляются простые финслеровы $O(gv)$-поправки (42)–(43) к эффектам в экспериментах типа Майкельсона–Морли. Зная явный вид функций $Z(q)$ и $V(v)$, можно вычислять финслеровы поправки любого более высокого порядка.

Литература

1. *Асанов Г.С.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1996. № 1. С 18. (Moscow University Phys. Bull. 1996. No. 1. P. 15).
2. *Асанов Г.С.* // Там же. 1996 № 3. С. 8 (Ibid. No. 3. P. 1).
3. *Haugan M.P., Will C.M.* // Physics Today. 1987. **40**. P. 69.
4. *Will C.M.* // Phys. Rev. 1992. **D45**. P. 403.

Поступила в редакцию
19.05.97