

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.2:534

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВОЗМОЖНОСТЕЙ.
МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ**

5. Нечеткие элементы, независимость, условные распределения

Ю. П. Пытьев

(кафедра компьютерных методов физики)

Определены и исследованы понятия нечеткого элемента, независимости нечетких элементов, условного распределения, условного относительно нечеткого элемента интеграла.

Введение

Как отмечено в работах [1, 2], для моделирования нечеткости*) привлекаются математические понятия нечеткого множества, нечеткого элемента и возможности. Нечеткое множество $A \subset X$ определяется его характеристической функцией**) (х.ф.) $\mu_A(\cdot): X \rightarrow [0, 1]$, ее значение $\mu_A(x)$ есть возможность включения $x \in X$ в A , точнее, возможность того, что элемент $x \in X$ накрывается A [2]. При этом х.ф. $\mu_A(x) = \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$ определяет «обычное», «четкое» множество $A \subset X$.

Нечеткий элемент ξ , принимающий значения в X , задается распределением возможностей $\varphi^\xi(\cdot): X \rightarrow [0, 1]$ его значений, согласно которому $\varphi^\xi(x)$ — возможность равенства $\xi = x$ (возможность включения $\xi \in \{x\} \subset X$). «Обычный», «четкий» элемент $y \in X$ может быть задан как нечеткий элемент ξ , распределение которого имеет вид $\varphi^\xi(x) = \delta_y(x) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y. \end{cases}$ Согласно этому выражению $y \in X$ — единственное возможное значение ξ .

Функция $\varphi^\xi(\cdot): X \rightarrow [0, 1]$ определяет распределение возможностей $P^\xi(\cdot): \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$ и соответствующее возможностное пространство***) $(X, \mathcal{P}(X), P^\xi(\cdot))$ [1]. Для любого $A \in \mathcal{P}(X)$ возможность

$$P^\xi(A) = p_{\varphi^\xi}(\chi_A(\cdot)) = \sup_{x \in A} \varphi^\xi(x) = \sup_{x \in X} \min(\chi_A(x), \varphi^\xi(x)) \quad (1)$$

есть интеграл $\chi_A(\cdot)$ по возможности $P^\xi(\cdot)$ [2], заданной распределением $\varphi^\xi(\cdot)$; его значение будем интерпретировать как возможность включения нечеткого элемента ξ в A (события $\xi \in A$), $P(\xi \in A) \triangleq P^\xi(A)$. Согласно выражению (1) для одноточечного множества $A = \{x\}$ $P(\xi \in A) = \varphi^\xi(x)$ — возможность равенства $\xi = x$, как требует того интерпретация распределения $\varphi^\xi(\cdot)$.

Если A — нечеткое множество, $\mu_A(\cdot): X \rightarrow [0, 1]$ — его х.ф., то возможность включения $\xi \in A$ (нечеткого события $\xi \in A$) определяется как интеграл $\mu_A(\cdot)$ по P^ξ [2]:

$$P(\xi \in A) = p_{\varphi^\xi}(\mu_A(\cdot)) = \sup_{x \in X} \min(\mu_A(x), \varphi^\xi(x)). \quad (2)$$

В этом равенстве $\min(\mu_A(x), \varphi^\xi(x))$ — возможность события****) $(\xi = x) \cap (x \in A)$, а событие $\{\xi \in A\} = \bigcup_{x \in X} (\{\xi = x\} \cap \{x \in A\})$.

Необходимость включения $\xi \in A$ (нечеткого события $\xi \in A$) определяется как интеграл $\mu_A(\cdot)$ по N^ξ [2]:

$$N(\xi \in A) = n_{\neg\varphi^\xi}(\mu_A(\cdot)) = \inf_{x \in X} \max(\mu_A(x), \neg\varphi^\xi(x)). \quad (2^*)$$

Функцию $\neg\varphi^\xi: X \rightarrow [0, 1]$ назовем распределением необходимостей*****) ξ , значение $\neg\varphi^\xi(x)$ есть необходимость неравенства $\xi \neq x$: $N(\xi \neq x) = N(\xi \in$

*) Мы не касаемся здесь классической модели нечеткости, основанной на математической теории вероятности и математической статистике.

**) В теории нечетких множеств $\mu_A(\cdot)$ называется функцией принадлежности, значение $\mu_A(x)$ определяет степень включения $x \in X$ в A [3].

***) Речь идет о возможности $P^\xi(\cdot)$, продолженной на σ -алгебру $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X [4].

****) События $\xi = x$ и $x \in A$ считаются P^ξ -независимыми [5], возможность $P^\xi(\cdot)$ — определенной на классе $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X , мера $p_{\varphi^\xi}(\cdot): \mathcal{L}(X) \rightarrow [0, 1]$ — на классе всех функций $X \rightarrow [0, 1]$ [5].

*****) Буквально значение $\neg\varphi^\xi(\cdot) \triangleq 1 - \varphi^\xi(\cdot)$ есть мера невозможности равенства $\xi = x$, мера сомнения в его истинности; интерпретация $\neg\varphi^\xi(\cdot)$ как распределения необходимостей дана согласно выражению для интеграла $\mu_A(\cdot)$ (2*) по распределению $\neg\varphi^\xi(\cdot)$ необходимости N^ξ (2*).

$\in (X \setminus \{x\}) = \neg P(\xi = x) = \neg \varphi^\xi(x)$. Для любого «четкого» $A \in \mathcal{P}(X)$ $N(\xi \in A) = \inf_{x \in X} \neg \varphi^\xi(x)$.

Заметим, что если ξ — «четкий» элемент $y \in X$, то согласно равенству (2)

$$P(\xi \in A) = \sup_{x \in X} \min(\mu_A(x), \delta_y(x)) = \mu_A(y) \quad (3)$$

— возможность включения $y \in A$ в полном соответствии с нашей интерпретацией х.ф. $\mu_A(\cdot)$ нечеткого множества A . Более того, в этом случае и $N(\xi \in A) = \inf_{x \in X} \max(\mu_A(x), \neg \delta_y(x)) = \mu_A(y)$.

Как нетрудно убедиться, для любых нечетких множеств A и B согласно выражению (2)

$$P(\xi \in A \cup B) = \max(P(\xi \in A), P(\xi \in B)) \quad (4)$$

и, в частности, если ξ — «четкий» элемент $y \in X$, то согласно (3), (4) $\mu_{A \cup B}(y) = P(\xi \in A \cup B) = \max(\mu_A(y), \mu_B(y))$, как это и принято в теории нечетких множеств [3]. А если, как в теории нечетких множеств, определить

$$\mu_{A \cap B}(y) = \min(\mu_A(y), \mu_B(y)), \quad y \in X, \quad (5)$$

то для «четкого» $\xi = y \in X$ согласно (3) $P(\xi \in A \cap B) = \min(\mu_A(y), \mu_B(y)) = \min(P(\xi \in A), P(\xi \in B))$, т.е. события $\xi \in A$ и $\xi \in B$ P^ξ -независимы [5]. И наоборот, если события $\xi \in A$ и $\xi \in B$ P^ξ -независимы для любого «четкого» ξ , то х.ф. нечетких множеств A , B и $A \cap B$ связаны условием (5). Если же ξ — произвольный нечеткий элемент, то условие (5) влечет лишь неравенство

$$\begin{aligned} P(\xi \in A \cap B) &= \sup_{x \in X} \min(\mu_A(x), \mu_B(x), \varphi^\xi(x)) \leq \\ &\leq \min(\sup_{x \in X} \min(\mu_A(x), \varphi^\xi(x)), \sup_{x \in X} \min(\mu_B(x), \varphi^\xi(x))) = \\ &= \min(P(\xi \in A), P(\xi \in B)), \end{aligned}$$

показывающее, что события $\xi \in A$ и $\xi \in B$ в общем случае не являются P^ξ -независимыми.

1. Нечеткие элементы

В теории возможностей нечеткий элемент играет ту же роль, что случайный элемент играет в теории вероятностей, соответственно нечеткое множество — аналог случайного множества в теории вероятностей [6]. Остановимся подробнее на понятии нечеткого элемента в теории возможностей.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть (X, \mathcal{A}, P) — возможностное, (Y, \mathcal{B}) — измеримое пространство [1]*). Нечетким элементом на (X, \mathcal{A}, P) со значениями в

(Y, \mathcal{B}) называется любая \mathcal{A}, \mathcal{B} -измеримая***) функция $\eta(\cdot): X \rightarrow Y$.

Нечеткий элемент η индуцирует на σ -алгебре \mathcal{B} возможность $P^\eta: P(\eta \in B) = P^\eta(B) \triangleq P(\eta^{-1}(B))$, $B \in \mathcal{B}$, и тем самым порождает возможностное пространство (Y, \mathcal{B}, P^η) . Разумеется, функция $\xi(\cdot): X \rightarrow X$, $\xi(x) = x$, $x \in X$, \mathcal{A} -измерима и определяет (канонический) нечеткий элемент на (X, \mathcal{A}, P) с $P = P^\xi$. Для любого $A \in \mathcal{A}$ возможность $P(\xi \in A)$ включения ξ в A отождествим с $P(A) = P^\xi(A)$. Если $p(\cdot)$ — интеграл по $P(\cdot)$, то $P(\xi \in A) = p(\chi_A(\cdot))$, где $\chi_A(\cdot)$ — х.ф. $A \in \mathcal{A}$, а $p(\mu_A(\cdot))$ — возможность включения ξ в нечеткое множество A с х.ф. $\mu_A(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ [2].

Если \mathcal{A} содержит все одноточечные подмножества X , то возможность P^ξ может быть задана распределением $\varphi^\xi(\cdot)$, $P^\xi(A) = \sup_{x \in A} \varphi^\xi(x)$, $A \in \mathcal{A}$, $p(\mu_A(\cdot)) = \sup_{x \in X} \min(\mu_A(x), \varphi^\xi(x))$, а значение $\varphi^\xi(x) = P(\xi \in \{x\})$ есть возможность равенства $\xi = x \in X$. Если \mathcal{B} содержит все одноточечные подмножества Y , то возможность P^η также будет задана распределением $\varphi^\eta(\cdot)$, причем

$$\varphi^\eta(y) = \sup_{x \in \eta^{-1}(\{y\})} \varphi^\xi(x), \quad y \in Y, \quad (6)$$

ибо $P^\eta(B) = \sup_{x \in \eta^{-1}(B)} \varphi^\xi(x) = \sup_{y \in B} \sup_{x \in \eta^{-1}(\{y\})} \varphi^\xi(x)$, а значение $\varphi^\eta(y) = P(\xi \in \eta^{-1}(\{y\})) = P(\eta \in \{y\})$ — возможность равенства $\eta = y \in Y$.

Нечеткий элемент $\eta = \eta(\xi)$ — функция ξ , но его можно рассматривать и как (канонический) нечеткий элемент на (Y, \mathcal{B}, P^η) , не обращаясь к возможностному пространству (X, \mathcal{A}, P^ξ) . Поэтому далее, если не оговорено пространство значений, считается, что нечеткий элемент ξ , определенный на (X, \mathcal{A}, P) , принимает значения в (X, \mathcal{A}) .

Пусть, например, ξ_1, ξ_2 — нечеткие элементы на (X, \mathcal{A}, P) , $\varphi(x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in X$, — распределение нечеткого элемента (вектора) $\eta = (\xi_1, \xi_2): X \times X \rightarrow Y = X \times X$, т.е. $\varphi(x_1, x_2)$ — возможность равенств $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2$. Если на Y определена бинарная операция, например сложение «+»: $Y \rightarrow X$, то $\zeta = \xi_1 + \xi_2$ (сумма ξ_1 и ξ_2) — нечеткий элемент на $(X, \mathcal{A}, P^\zeta)$, и согласно формул (6) $\varphi^\zeta(z) = \sup\{\varphi(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in X, x_1 + x_2 = z\}$, $z \in X$, — его распределение.

З а м е ч а н и е 1. В работе [4] показано, что любая возможность $P(\cdot): \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ может быть продолжена с σ -алгебры \mathcal{A} на алгебру $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X , и получено максимальное ее продолжение***) $\bar{P}(\cdot): \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$. Продолжение $\bar{P}(\cdot)$ —

*) \mathcal{A}, \mathcal{B} — σ -алгебры подмножеств X и Y соответственно.

**) Это означает, что $B \in \mathcal{B} \Rightarrow A = \eta^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

***) $\bar{P}(A) = P(A)$, $A \in \mathcal{A}$, и для любого продолжения $\hat{P}(\cdot)$ $\hat{P}(A) \leq \bar{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(X)$ [4].

возможность, определенная на всех, в том числе однотоочечных, подмножествах X и, следовательно, заданная распределением $\varphi(x) = \bar{P}(\{x\})$, $x \in X$.

Поэтому далее, говоря о нечетком элементе ξ , будем считать (если не оговорено противное), что нечеткий элемент ξ определен на возможностном пространстве $(X, \mathcal{P}(X), P)$ и задан распределением $\varphi^\xi(\cdot)$, совпадающим с распределением $\varphi(\cdot)$ возможности $P(\cdot)$. При этом для любого $A \in \mathcal{P}(X)$ $P^\xi(A) = P(\xi \in A) = P(A) = \sup_{x \in A} \varphi^\xi(x)$, $N(A) = N(\xi \in A) = \inf_{x \in X \setminus A} \neg \varphi^\xi(x)$, и для любой функции $f(\cdot): X \rightarrow [0, 1]$ $p(f(\cdot)) = p_{\varphi^\xi}(f(\cdot)) = \sup_{x \in X} \min(f(x), \varphi^\xi(x))$, $n(f(\cdot)) = n_{\neg \varphi^\xi}(f(\cdot)) = \inf_{x \in X} \max(f(x), \neg \varphi^\xi(x))$ [2].

2. Независимость нечетких элементов. Условное распределение

О п р е д е л е н и е 2. Нечеткие элементы ξ и η , определенные на возможностном пространстве (Z, \mathcal{C}, P) и принимающие значения в измеримых пространствах (X, \mathcal{A}) и (Y, \mathcal{B}) соответственно, назовем независимыми, если для любых $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ события $\xi \in A$, $\eta \in B$ P -независимы, т.е. если $P(\xi \in A, \eta \in B) = \min(P(\xi \in A), P(\eta \in B))$.

Здесь и далее предполагается, что на (Z, \mathcal{C}, P) определен (канонический) нечеткий элемент ζ , $P(Q) \equiv P^\zeta(\zeta \in Q)$, $Q \in \mathcal{C}$, $\xi: Z \rightarrow X$, $\eta: Z \rightarrow Y$ — функции $\zeta \in Z: \xi = \xi(\zeta)$, $\eta = \eta(\zeta)$, и по определению

$$P(\xi \in A) \triangleq P(\zeta \in \xi^{-1}(A)),$$

$$P(\eta \in B) \triangleq P(\zeta \in \eta^{-1}(B)),$$

$$P(\xi \in A, \eta \in B) \triangleq P(\zeta \in (\xi^{-1}(A) \cap \eta^{-1}(B))).$$

З а м е ч а н и е 2. Это определение эквивалентно определению независимости ξ и η как N -независимости событий $\xi \in A$ и $\eta \in B$ при любых $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}$, означающей, что $N((\xi \in A) \cup (\eta \in B)) = \max(N(\xi \in A), N(\eta \in B))$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ [5]. Здесь $N(\xi \in A) \triangleq N(\zeta \in \xi^{-1}(A))$, $N(\eta \in B) \triangleq N(\zeta \in \eta^{-1}(B))$, $N((\xi \in A) \cup (\eta \in B)) \triangleq N(\zeta \in (\xi^{-1}(A) \cup \eta^{-1}(B)))$.

Эквивалентность легко усмотреть из соотношений двойственности: $N((\xi \in A) \cup (\eta \in B)) = \neg P((\xi \in X \setminus A) \cap (\eta \in Y \setminus B)) = \neg \min(P(\xi \in X \setminus A), P(\eta \in Y \setminus B))$

*) Координаты $\xi = \xi(\xi, \eta)$, $\eta = \eta(\xi, \eta)$ — функции нечеткого вектора (ξ, η) , маргинальные распределения получены согласно формуле (6).

**) Такие нечеткие элементы обычно называются невзаимодействующими [7].

***) В данном случае \mathcal{A} , \mathcal{B} содержат однотоочечные множества, поскольку нечеткий вектор (ξ, η) задан распределением $\varphi^{\xi, \eta}(\cdot, \cdot)$.

$$\in Y \setminus B)) = \max(\neg P(\xi \in X \setminus A), \neg P(\eta \in Y \setminus B)) = \max(N(\xi \in A), N(\eta \in B)). \blacksquare$$

Л е м м а 1. Пусть $\varphi^{\xi, \eta}(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$, — распределение нечеткого вектора (ξ, η) . Нечеткие элементы ξ и η независимы, если и только если $\varphi^{\xi, \eta}(x, y) = \min(\varphi^\xi(x), \varphi^\eta(y)) \triangleq \varphi^\xi(x) \bullet \varphi^\eta(y)$, $x \in X$, $y \in Y$, где $\varphi^\xi(x) = \sup_{y \in Y} \varphi^{\xi, \eta}(x, y)$, $x \in X$, $\varphi^\eta(y) = \sup_{x \in X} \varphi^{\xi, \eta}(x, y)$, $y \in Y$ — маргинальные распределения ξ и η соответственно*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, если распределение $\varphi^{\xi, \eta}(x, y) = \min(\varphi^\xi(x), \varphi^\eta(y))$, $x \in X$, $y \in Y$, то, очевидно, нечеткие элементы ξ и η независимы**). Наоборот, если ξ и η независимы, то для любых событий $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned} \sup\{\varphi^{\xi, \eta}(x, y) | x \in A, y \in B\} &= \\ &= \min(\sup\{\varphi^{\xi, \eta}(x, y) | x \in A, y \in Y\}, \\ \sup\{\varphi^{\xi, \eta}(x, y) | x \in X, y \in B\}) &= \\ &= \sup\{\min(\varphi^\xi(x), \varphi^\eta(y)) | x \in A, y \in B\}. \blacksquare \end{aligned} \tag{7}$$

Выбирая в (7) в качестве $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ однотоочечные множества $\{x\} \in \mathcal{A}$, $\{y\} \in \mathcal{B}$, получим равенство***) $\varphi^{\xi, \eta}(x, y) = \min(\varphi^\xi(x), \varphi^\eta(y))$, $x \in X$, $y \in Y$.

С л е д с т в и е 1. Нечеткие элементы ξ и η независимы, если и только если $\neg \varphi^{\xi, \eta}(x, y) = \max(\neg \varphi^\xi(x), \neg \varphi^\eta(y))$, $x \in X$, $y \in Y$.

Пусть (Z, \mathcal{C}, P) — возможностное пространство, \mathcal{C}' , \mathcal{C}'' — σ -подалгебры σ -алгебры \mathcal{C} подмножеств Z .

О п р е д е л е н и е 3. Назовем σ -алгебры \mathcal{C}' и \mathcal{C}'' независимыми, если $P(A' \cap A'') = \min(P(A'), P(A''))$ для любых $A' \in \mathcal{C}'$, $A'' \in \mathcal{C}''$.

Пусть \mathcal{C}^ξ , \mathcal{C}^η — минимальные σ -алгебры, относительно которых измеримы нечеткие элементы $\xi: (Z, \mathcal{C}) \rightarrow (X, \mathcal{A})$ и $\eta: (Z, \mathcal{C}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ соответственно, $\mathcal{C}^\xi = \xi^{-1}(\mathcal{A})$, $\mathcal{C}^\eta = \eta^{-1}(\mathcal{B})$. Согласно определениям 2, 3 нечеткие элементы ξ и η независимы, если и только если независимы \mathcal{C}^ξ и \mathcal{C}^η .

Отсюда следует, в частности, что нечеткие элементы $h(\xi)$ и $g(\eta)$ независимы, если независимы ξ и η . Это, впрочем, видно и непосредственно: $P(h(\xi) \in A, g(\eta) \in B) = P(\xi \in h^{-1}(A), \eta \in g^{-1}(B)) = \min(P(\xi \in h^{-1}(A)), P(\eta \in g^{-1}(B))) = \min(P(h(\xi) \in A), P(g(\eta) \in B))$.

О п р е д е л е н и е 4. Вариантом условного распределения нечеткого элемента $\eta \in Y$ при условии

$\xi = x \in X$ (условного относительно ξ распределения η) назовем любое решение $\varphi^{\eta|\xi}(y|x)$ уравнения

$$\min(\varphi^{\eta|\xi}(y|x), \varphi^\xi(x)) = \varphi^{\xi,\eta}(x, y), \quad x \in X, \quad y \in Y, \quad (8)$$

где $\varphi^\xi(x) = \sup_{y \in Y} \varphi^{\xi,\eta}(x, y)$, $x \in X$, — маргинальное распределение $\xi \in X$, $\varphi^\xi(x) \geq \varphi^{\xi,\eta}(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$.

Последнее неравенство гарантирует разрешимость уравнения (8) при любых $x \in X$, $y \in Y$, а именно: $\varphi^{\eta|\xi}(y|x) = \varphi^{\xi,\eta}(x, y)$, если $\varphi^\xi(x) > \varphi^{\xi,\eta}(x, y)$, $\varphi^{\eta|\xi}(y|x) \geq \varphi^{\xi,\eta}(x, y)$, если $\varphi^\xi(x) = \varphi^{\xi,\eta}(x, y)$. При этом равенство $\varphi^\eta(y) = \sup_{x \in X} \varphi^{\xi,\eta}(x, y) = \sup_{x \in X} \min(\varphi^{\eta|\xi}(y|x), \varphi^\xi(x))$, $y \in Y$, связывает маргинальное распределение $\eta \in Y$ с маргинальным распределением $\xi \in X$ посредством условного распределения $\varphi^{\eta|\xi}(\cdot|\cdot)$.

Поскольку $\varphi^{\xi,\eta}(x, y) \leq \min(\varphi^\xi(x), \varphi^\eta(y))$, $x \in X$, $y \in Y$, то при условии $\varphi^\xi(x) = \varphi^{\xi,\eta}(x, y)$ в качестве решения уравнения (8) можно выбрать $\varphi^{\eta|\xi}(y|x) = \varphi^\eta(y) \geq \varphi^{\xi,\eta}(x, y)$. Такой выбор определит вариант условного распределения

$$\varphi^{\eta|\xi}(y|x) = \begin{cases} \varphi^{\xi,\eta}(x, y), & \text{если } \varphi^\xi(x) > \varphi^{\xi,\eta}(x, y), \\ \varphi^\eta(y), & \text{если } \varphi^\xi(x) = \varphi^{\xi,\eta}(x, y), \end{cases} \\ x \in X, \quad y \in Y,$$

обеспечивающий равенство $\varphi^{\eta|\xi}(y|x) = \varphi^\eta(y)$, $x \in X$, $y \in Y$ в случае независимости ξ и η (см. лемму 1).

Нетрудно убедиться в том, что ξ и η независимы, если и только если существует вариант условного распределения, для которого $\varphi^{\eta|\xi}(y|x) = \varphi^\eta(y)$, $x \in X$, $y \in Y$ (см. лемму 1 из [5]).

Пусть $p_\varphi(f(\cdot, \cdot))$ — интеграл $f(\cdot, \cdot) \in \mathcal{L}(X \times Y)$ по возможности, заданной распределением $\varphi^{\xi,\eta}(\cdot, \cdot)$: $p_{\varphi^{\xi,\eta}}(f(\cdot, \cdot)) = \sup_{x,y} \min(f(x, y), \varphi^{\xi,\eta}(x, y))$ (см. формулу (12) из [1]). Тогда $p_{\varphi^{\xi,\eta}}(f(\cdot, \cdot)) = \sup_{x,y} \min(f(x, y),$

$$\min(\varphi^{\eta|\xi}(y|x), \varphi^\xi(x)) = \sup_{x \in X} [\min(\varphi^\xi(x), \sup_{y \in Y} \min(f(x, y), \varphi^{\eta|\xi}(y|x))].$$

Иначе говоря, интеграл $p_{\varphi^{\xi,\eta}}(f(\cdot, \cdot))$ по совместному распределению ξ, η можно вычислить, посчитав для каждого $x \in X$ интеграл $\sup_{y \in Y} \min(f(x, y),$

$\varphi^{\eta|\xi}(y|x)$) по условному распределению $\varphi^{\eta|\xi}(\cdot|x)$, а затем проинтегрировав результат по распределению (условия) ξ . Если нечеткие элементы ξ и η независимы, то $\varphi^{\xi,\eta}(x, y) = \min(\varphi^\xi(x), \varphi^\eta(y))$, $x \in X$, $y \in Y$,

и*) $p_{\varphi^{\xi,\eta}}(f(\cdot, \cdot)) = p_{\varphi^\xi}(f(\cdot))$, где $f(x) = p_{\varphi^\eta}(f(x, \cdot))$, $x \in X$.

Сказанное выше можно переформулировать в терминах распределения необходимостей, определив вариант условного распределения необходимостей нечеткого элемента $\eta \in Y$ при условии $\xi = x \in X$ как любое решение $\neg\varphi^{\eta|\xi}(y|x)$ уравнения

$$\max(\neg\varphi^{\eta|\xi}(y|x), \neg\varphi^\xi(x)) = \neg\varphi^{\eta,\xi}(y, x), \quad x \in X, \quad y \in Y, \quad (8^*)$$

например как

$$\neg\varphi^{\eta|\xi}(y|x) = \begin{cases} \neg\varphi^{\xi,\eta}(x, y), & \text{если } \neg\varphi^\xi(x) < \neg\varphi^{\xi,\eta}(x, y), \\ \neg\varphi^\eta(y), & \text{если } \neg\varphi^\xi(x) = \neg\varphi^{\xi,\eta}(x, y), \end{cases} \\ x \in X, \quad y \in Y.$$

При этом $n_{\neg\varphi^{\xi,\eta}}(f(\cdot, \cdot)) = \inf_{x \in X, y \in Y} \max(f(x, y), \max(\neg\varphi^{\eta|\xi}(y|x), \neg\varphi^\xi(x))) = \inf_{x \in X} \max(\neg\varphi^{\eta|\xi}(y|x), \neg\varphi^\xi(x))$.

Выражения

$$\sup_{y \in Y} \min(f(x, y), \varphi^{\eta|\xi}(y|x)), \\ \inf_{y \in Y} \max(f(x, y), \neg\varphi^{\eta|\xi}(y|x)), \quad x \in X, \quad (9)$$

определяют варианты условных (при условии $\xi = x$) интегралов $f(\xi, \cdot)$ по условной возможности $P^{\eta|\xi}$ и по условной необходимости $N^{\eta|\xi}$, заданным условными распределениями $\varphi^{\eta|\xi}(\cdot|x)$ и $\neg\varphi^{\eta|\xi}(\cdot|x)$, $x \in X$, соответственно. Понятие условного относительно нечеткого элемента интеграла подробнее рассмотрено ниже.

Завершим этот раздел формальным примером последовательности независимых нечетких элементов**), ξ_1, \dots, ξ_n , каждый из которых является копией нечеткого элемента ξ . Последовательностью независимых нечетких элементов назовем возможностное пространство $(X^n, \mathcal{A}^n, P_n)$, в котором X — множество значений нечеткого элемента ξ , X^n — множество значений нечеткого элемента (ξ_1, \dots, ξ_n) , и для любых событий $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $P_n(\xi_1 \in A_1, \dots, \xi_n \in A_n) = \min_{1 \leq i \leq n} P(\xi_i \in A_i)$, что означает независимость нечетких элементов ξ_1, \dots, ξ_n .

Пусть $X = \mathcal{R}_1$ — действительная прямая. Рассмотрим нечеткие переменные $\eta = \bigoplus_{j=1}^n \xi_j \triangleq \max_{1 \leq i \leq n} \xi_i$,

$\zeta = \bigodot_{j=1}^n \xi_j \triangleq \min_{1 \leq i \leq n} \xi_i$. Если $\varphi^\xi(x)$, $x \in X$, — распределение нечеткой переменной ξ , то $\varphi^\eta(y) = \sup\{\min(\varphi^\xi(x_1), \dots, \varphi^\xi(x_n)) \mid x_1 \in X, \dots, x_n \in X,$

*) Аналог теоремы Фубини.

**) Аналог последовательности независимых испытаний в теории вероятностей.

$$\max(x_1, \dots, x_n) = y \} = \max_{1 \leq k \leq n} [\min(\sup_{x_1 \leq y} \varphi^\xi(x_1), \dots, \sup_{x_{k-1} \leq y} \varphi^\xi(x_{k-1}), \varphi^\xi(y), \sup_{x_{k+1} \leq y} \varphi^\xi(x_{k+1}), \dots, \sup_{x_n \leq y} \varphi^\xi(x_n))] = \varphi^\xi(y), y \in X.$$

Аналогично получим, что $\varphi^\zeta(z) = \varphi^\xi(z)$, $z \in X$, т.е. η и ζ распределены точно так же, как ξ .

В этом нет ничего удивительного для теории, все выводы которой должны быть инвариантны относительно монотонно возрастающего обратимого преобразования шкалы значений возможности, поскольку в данном случае если для ξ выполняются соотношения $P(\xi = x) > P(\xi = y)$ или $P(\xi = x) = P(\xi = y)$, то точно такие же соотношения будут выполняться для $\eta = \max_{1 \leq i \leq n} \xi_i$ и для $\zeta = \min_{1 \leq i \leq n} \xi_i$ при любом $n = 1, 2, \dots, \eta$.

3. Условный относительно нечеткого элемента интеграл

Пусть $\mathcal{C} = \mathcal{C}^n$ — минимальная σ -подалгебра σ -алгебры \mathcal{A} , относительно которой измерим нечеткий элемент $\eta: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (X, \mathcal{B})$ ($\eta(\cdot): X \rightarrow Y \in \mathcal{A}$, \mathcal{B} -измеримая функция, \mathcal{C}^n — минимальная σ -алгебра, содержащая все $C = \eta^{-1}(B)$, $B \in \mathcal{B}$).

О п р е д е л е н и е 5. Пусть $f(\cdot): X \rightarrow [0, 1]$ — \mathcal{A} -измеримая функция. Условный относительно σ -подалгебры \mathcal{C}^n интеграл*¹⁾ $f(\cdot)$ назовем условным относительно нечеткого элемента η интегралом $f(\cdot)$ и обозначим $p(f(\cdot)|\eta)(x)$, $x \in X$.

Всякая \mathcal{C}^n -измеримая функция $g(\cdot)$, определенная на (X, \mathcal{A}) со значениями в (Z, \mathcal{C}) , является, как известно, функцией η , т.е. может быть задана равенством $g(x) = F(\eta(x))$, $x \in X$, в котором $F(\cdot): (Y, \mathcal{B}) \rightarrow (Z, \mathcal{C})$. Так как по определению $p(f(\cdot)|\eta)(\cdot): (X, \mathcal{A}) \rightarrow ([0, 1], \mathcal{D})$, где \mathcal{D} — борелевская σ -алгебра подмножеств $[0, 1]$, есть \mathcal{C}^n -измеримая функция, то $p(f(\cdot)|\eta)(x) = F(\eta(x))$, $x \in X$, где $F(\cdot): (Y, \mathcal{B}) \rightarrow ([0, 1], \mathcal{D})$, и считая, что в равенстве (5) работы [5] $C = \{x \in X, \eta(x) = y\} = C(y)$, найдем

$$p((f \bullet \chi_C)(\cdot)) = p((F(y) \bullet \chi_C)(\cdot)) = F(y) \bullet P(C) = \min(F(y), \varphi^\eta(y)), \quad y \in Y, \quad (10)$$

где $\varphi^\eta(y) = P(\{x \in X, \eta(x) = y\})$. Это соотношение является уравнением для определения условного относительно η интеграла $F(\eta)$, $\eta \in Y$.

Пусть [1, 5]

$$p(f(\cdot)) = p_\varphi(f(\cdot)) = \sup_{x \in X} \min(f(x), \varphi(x)), \quad (11)$$

тогда для $y \in \eta(X) = Y$ и $C = \{x \in X, \eta(x) = y\}$

$$p_\varphi((f \bullet \chi_C)(\cdot)) = \sup_{x \in X} \min(f(x), \chi_C(x), \varphi(x)) = \sup_{x \in X, \eta(x)=y} \min(f(x), \varphi(x)) \triangleq \psi(y), \quad (12)$$

$$\varphi^\eta(y) = \sup_{x \in X, \eta(x)=y} \varphi(x),$$

и, следовательно, уравнение (10), определяющее условный относительно η интеграл $p(f(\cdot)|\eta)(\cdot) = F(\eta(\cdot))$, можно записать в виде

$$\min(F(y), \varphi^\eta(y)) = \psi(y), \quad y \in Y, \quad (13)$$

откуда находим следующее представление для всякого варианта $F(\eta(\cdot))$ условного относительно η интеграла $f(\cdot)$:

$$F(y) \begin{cases} = \psi(y), & \text{если } \varphi^\eta(y) > \psi(y), \\ \geq \psi(y), & \text{если } \varphi^\eta(y) = \psi(y), \end{cases} \quad y \in \eta(Y).$$

Заметим, что согласно равенствам (11), (12) и (13)

$$p_\varphi(f(\cdot)) = \sup_{y \in Y} \sup_{x \in X, \eta(x)=y} \min(f(x), \varphi(x)) = \sup_{y \in Y} \min(F(y), \varphi^\eta(y)) = p_{\varphi^\eta}(F(\cdot)), \quad (14)$$

причем для правой части (14) имеют место равенства

$$p_{\varphi^\eta}(F(\cdot)) = \sup_{y \in Y} \sup_{x \in X, \eta(x)=y} \min(F(y), \varphi(x)) = \sup_{x \in X} \min(F(\eta(x)), \varphi(x)) = p_\varphi(F(\eta(\cdot))),$$

которые вместе с (14) дают $p_\varphi(f(\cdot)) = p_\varphi(F(\eta(\cdot))) = p_{\varphi^\eta}(F(\cdot))$, что является частным случаем общего соотношения $p(f(\cdot)) = p(p(f(\cdot)|\eta)(\cdot))$, следующего из формулы (5) работы [5] при $C = X$.

Аналогом $F(y)$ в теории вероятностей является условное математическое ожидание $f(\cdot)$ при $\eta = y$.

П р и м е р ы .

1. Пусть в (11) $p_\varphi(\cdot)$ — интеграл по распределению $\varphi^{\eta, \zeta}(\cdot, \cdot)$ нечеткого вектора (η, ζ) , $x = (y, z)$, $X = Y \times Z$, $C = \{y\} \times Z$. Выберем в качестве $f(\cdot)$ характеристическую функцию множества $Y \times \{z\}$, зависящую от $z \in Z$ как от параметра. Тогда в (12)

$$p_\varphi((\chi_{Y \times \{z\}} \bullet \chi_{\{y\} \times Z})(\cdot)) = \sup_{\tilde{y} \in Y, \tilde{z} \in Z} \min(\chi_{Y \times \{z\}}(\tilde{y}, \tilde{z}), \varphi^{\eta, \zeta}(\tilde{y}, \tilde{z})) = \varphi^{\eta, \zeta}(y, z),$$

$$\varphi^\eta(y) = \sup_{\tilde{z} \in Z} (\varphi^{\eta, \zeta}(y, \tilde{z})), \quad y \in Y, \quad z \in Z,$$

а уравнение (13) $\min(F(y, z), \varphi^\eta(y)) = \varphi^{\eta, \zeta}(y, z)$ определит условное распределение $\varphi^\zeta|^\eta(z|y) = F(y, z)$, $y \in Y, z \in Z$. ■

2. Пусть $\zeta(x, y) = x$, $p_{\varphi^{\xi, \eta}}(f(\cdot, \cdot)) = \sup_{x, y} \min(f(x, y), \varphi^{\xi, \eta}(x, y))$. Для определения условного относительно нечеткого элемента $\zeta(\xi, \eta) = \xi$ интеграла $p(f(\cdot, \cdot)|\zeta)(x)$, $x \in X$, согласно равенствам (12) найдем

*¹⁾ Определение условного относительно σ -подалгебры интеграла дано в работе [5].

$$\psi(x) = \sup_{y \in Y} \min(f(x, y), \varphi^{\xi, \eta}(x, y)),$$

$$\varphi^{\zeta}(x) = \sup_{y \in Y} \varphi^{\xi, \eta}(x, y) = \varphi^{\xi}(x), \quad x \in X.$$

Уравнение (13) для определения $p(f(\cdot, \cdot)|\zeta)(\cdot)$:
 $\min(p(f(\cdot, \cdot)|\zeta)(x), \varphi^{\xi}(x)) = \sup_{y \in Y} \min(f(x, y), \varphi^{\xi, \eta}(x, y)) = \min(\varphi^{\xi}(x), \sup_{y \in Y} \min(f(x, y), \varphi^{\eta|\xi}(y|x)))$, свидетельствует, что $p(f(\cdot, \cdot)|\zeta)(x) = \sup_{y \in Y} \min(f(x, y), \varphi^{\eta|\xi}(x, y))$, $x \in X$, — вариант условного относительно $\zeta = \xi$ интеграла $f(\cdot, \cdot)$ (9), найденный в предыдущем пункте. ■

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-01081).

Литература

1. *Пытьев Ю.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 3. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 3. P. 1).
2. *Пытьев Ю.П.* // Там же. № 4. С. 3 (Ibid. No. 4. P. 3).
3. *Zadeh L.A.* // Information and Control. 1965. 8. P. 335.
4. *Пытьев Ю.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. № 1. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1998. No. 1. P. 1).
5. *Пытьев Ю.П.* // Там же. 1997. № 6. С. 3 (Ibid. 1997. No. 6. P. 1).
6. *Матерон Ж.* Случайные множества и интегральная геометрия. М., 1978.
7. *Дюбуа Д., Прад А.* Теория возможностей. М., 1990.

Поступила в редакцию
23.06.97