

Литература

1. Самолюбов Б.И., Силаева Л.В // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1995. № 5. С. 63 (Moscow University Phys. Bull. 1995. No. 5. P. 58).
2. Самолюбов Б.И. Дис. ... докт. физ.-мат. наук. М. (МГУ), 1996.
3. Баренблатт Г.И., Голицын Г.С. Локальная структура развитых пыльных бурь. М., 1973. С. 11–18
4. Поборчая Л.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1972. № 4. С. 25 (Moscow University Phys. Bull. 1972. No. 4).
5. Chikita K.A. // Japan. J. Limnol. 1991. 52, No. 1. P. 27.
6. Chikita K.A. // Intern. Hydrology and Water Resources Symposium. Perth, 1991. P. 268.
7. Chikita K.A. // Geoph. Bull. Hokkaido Univ. 1987. No. 49. P. 291.
8. Chikita K.A. // J. Faculty of Sci. Hokkaido Univ. 1980. 6, No. 2, P. 255.
9. Монин А.С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. Л., 1988.
10. Trowbridge J.H., Kineke G.C. // J. Geophys. Res. 1994. 99, No. C1. P. 865.

Поступила в редакцию
09.06.97

АСТРОНОМИЯ

УДК 521.9

ОБ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СЛУЧАЯХ ЗАДАЧИ ЛИУВИЛЛЯ

Ю. В. Баркин

(ГАИИШ)

Изучаются интегрируемые случаи задачи Лиувилля, для которых решение сведено к квадратурам. Используются классические уравнения Лиувилля и сравнительно новая форма уравнений вращательного движения изменяемого тела в переменных Андуайе.

1. Задача Лиувилля

Этой задачей назовем классическую задачу о вращательном движении изолированного деформируемого тела в предположении, что изменение его динамического строения задано во времени. В частности, оно может представлять собой твердое тело с изменяемой во времени внешней оболочкой.

Пусть $Cxyz$ и $C\xi\eta\zeta$ — две декартовы системы координат с началом в центре масс тела. Оси координат системы $Cxyz$ сохраняют фиксированные направления в пространстве. Оси $C\xi$, $C\eta$ и $C\zeta$ направлены по главным центральным осям инерции тела. Главные центральные моменты инерции тела, соответствующие этим осям, обозначим A , B и C . Вектор кинетического момента относительного движения частиц тела в системе координат $C\xi\eta\zeta$ обозначим $G^r = (P, Q, R)$, где P , Q и R — проекции этого вектора на подвижные оси $C\xi$, $C\eta$ и $C\zeta$ соответственно.

Введем вектор ω угловой скорости вращения осей тела в системе $C\xi\eta\zeta$ по отношению к системе координат $Cxyz$, а его проекции на оси координат $C\xi$, $C\eta$ и $C\zeta$ обозначим p , q и r . Аналогично введем вектор кинетического момента вращательного движения тела \mathbf{G} и его проекции на подвижные оси λ , μ и ν .

Дифференциальные уравнения задачи получаются из общих уравнений Лиувилля [1, 2] в предположении, что момент сил, действующих на тело, равен нулю:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Ap + P) + qR - rQ - (B - C)qr &= 0, \\ \frac{d}{dt}(Bq + Q) + rP - pR - (C - A)pr &= 0, \\ \frac{d}{dt}(Cr + R) + pQ - qP - (A - B)pq &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Задача заключается в интегрировании этих уравнений при произвольных начальных условиях: $t = t_0$, $p = p_0$, $q = q_0$, $r = r_0$ в предположении, что все характеристики A , B , C и P , Q , R являются известными функциями времени. Через A_0 , B_0 , C_0 и P_0 , Q_0 , R_0 обозначим начальные значения указанных функций.

Известен один первый интеграл уравнений (1):

$$(Ap + P)^2 + (Bq + Q)^2 + (Cr + R)^2 = G^2 = \text{const}, \quad (2)$$

выражающий условие постоянства модуля вектора \mathbf{G} .

Если в качестве новых переменных принять составляющие вектора \mathbf{G} в системе координат $C\xi\eta\zeta$:

$$\lambda = Ap + P, \quad \mu = Bq + Q, \quad \nu = Cr + R, \quad (3)$$

то уравнения вращательного движения (1) и интеграл (2) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} + \frac{R}{C}\mu - \frac{Q}{B}\nu + \frac{(C-B)}{BC}\mu\nu &= 0, \\ \frac{d\mu}{dt} + \frac{P}{A}\nu - \frac{R}{C}\lambda + \frac{(A-C)}{AC}\nu\lambda &= 0, \\ \frac{d\nu}{dt} + \frac{Q}{B}\lambda - \frac{P}{A}\mu + \frac{(B-A)}{BA}\lambda\mu &= 0, \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 &= G^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Для анализа задачи Лиувилля также привлечем уравнения вращательного движения деформируемого тела в переменных Андуайе. Эти уравнения были получены автором в 1979 г. и получили ряд приложений в задаче о движении системы гравитирующих деформируемых тел [3], в задаче о вращении Земли [4] и др.

Пусть

$$G, \theta, \rho, l, g, h \quad (5)$$

— переменные Андуайе, где G — величина вектора кинетического момента \mathbf{G} , ρ и h — наклонность и долготы восходящего узла промежуточной плоскости P_G , ортогональной вектору \mathbf{G} и проходящей через центр масс тела; g, θ и l — углы Эйлера (прецессии, нутации и собственного вращения), определяющие ориентацию осей координат тела в промежуточной системе координат $CG_1G_2G_3$, связанной с вектором \mathbf{G} и плоскостью P_G (ось CG_1 направлена вдоль линии пересечения плоскости P_G с основной координатной плоскостью Cxy в сторону восходящего узла этой плоскости; ось CG_3 направлена вдоль вектора \mathbf{G} , а ось CG_2 дополняет систему до правой).

Уравнения задачи Лиувилля в переменных Андуайе (5) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= 0, \quad \frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \frac{dh}{dt} = 0, \\ \frac{d\theta}{dt} &= G \sin \theta \sin l \cos l \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) + \frac{Q}{B} \sin l - \frac{P}{A} \cos l, \\ \frac{dl}{dt} &= G \cos \theta \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 l}{A} - \frac{\cos^2 l}{B} \right) + \\ &\quad + \operatorname{ctg} \theta \left(\frac{Q}{B} \cos l + \frac{P}{A} \sin l \right) - \frac{R}{C}, \\ \frac{dg}{dt} &= G \left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) - \frac{Q}{B} \cos l - \frac{P}{A} \sin l. \end{aligned} \quad (6)$$

Из первых уравнений системы (6) следуют три первых интеграла:

$$G = G_0, \quad \rho = \rho_0, \quad h = h_0, \quad (7)$$

где G_0, ρ_0, h_0 — начальные значения соответствующих переменных Андуайе. Интегралы (7) выражают факт постоянства вектора углового момента тела \mathbf{G} .

2. Интегрируемые случаи

1°. Наиболее просто задача Лиувилля решается для осесимметричного тела, когда вектор его кинетического момента относительного движения частиц тела \mathbf{G}^r направлен вдоль оси симметрии $C\zeta$. Это решение хорошо известно и обсуждается, например, в работах [5–7].

Действительно, задача легко интегрируется в следующих трех случаях:

- 1а) $P = Q = 0, R = R(t); A(t) = B(t) \neq C(t)$,
 1б) $Q = R = 0, P = P(t); B(t) = C(t) \neq A(t)$, (8)
 1в) $R = P = 0, Q = Q(t); C(t) = A(t) \neq B(t)$.

Условия (1б), (1в), очевидно, получаются из (1а) в результате циклического переобозначения соответствующих характеристик задачи.

В случае (1а) уравнения вращения тела (1) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Ap) + qR + (C-A)qr &= 0, \\ \frac{d}{dt}(Aq) - pR - (C-A)pr &= 0, \\ \frac{d}{dt}(Cr + R) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения (9) имеют дополнительный интеграл

$$Cr + R = \nu_0 = \text{const}$$

и легко интегрируются:

$$\begin{aligned} p &= \frac{A}{A_0(t)} \sqrt{p_0^2 + q_0^2} \sin(\tau - \tau_0), \\ q &= \frac{A}{A_0(t)} \sqrt{p_0^2 + q_0^2} \cos(\tau - \tau_0), \\ r &= \frac{C_0 r_0 + R_0 - R(t)}{C(t)}, \\ \tau - \tau_0 &= \int_0^t \frac{(C(t) - A(t))(C_0 r_0 + R_0 - R(t))}{A(t)C(t)} dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь p_0, q_0, r_0 и A_0, B_0, C_0 — начальные значения (при $t = t_0$) переменных и динамических характеристик тела; τ играет роль новой независимой переменной.

Решение задачи (1а) легко получить на основе уравнений движения в переменных Андуайе (6), которые здесь принимают тривиальный вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= 0, \quad \frac{dl}{dt} = G \cos \theta \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) - \frac{R}{C}, \\ \frac{dg}{dt} &= \frac{G}{A}. \end{aligned} \quad (11)$$

Решение уравнений (11) задается формулами

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0, \\ l &= G_0 \cos \theta_0 \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{C(t)} - \frac{1}{A(t)} \right) dt - \int_{t_0}^t \frac{R(t)}{C(t)} dt + l_0, \\ g &= G_0 \int_{t_0}^t \frac{dt}{A(t)} + g_0, \end{aligned} \quad (12)$$

где l_0, g_0 и θ_0 — начальные значения угловых переменных Андуйе.

В решении (10), (12) ось тела $C\zeta$ описывает круговой конус вокруг вектора \mathbf{G} кинетического момента, фиксированного в пространстве. Однако в отличие от движения твердого тела это движение по конической поверхности неравномерно, так же как и собственное вращение тела вокруг оси $C\zeta$.

2°. Задача Лиувилля также сводится к квадратурам в следующих трех случаях:

2а) $Q = 0, A = Bf_a(P), B = B(t), C = Bg_a(P), R = h_a(P), P = P(t),$

$$f_a(P) = \frac{C_0P(A_0 - B_0) + B_0P_0}{B_0P(A_0 - C_0) + C_0P_0},$$

$$g_a(P) = \frac{B_0P_0 + P(A_0 - B_0)}{B_0P_0},$$

$$h_a(P) = \frac{PR_0A_0}{P(A_0 - C_0) + P_0C_0};$$

2б) $R = 0, B = Cf_b(Q), C = C(t), A = Cg_b(Q), P = h_b(Q), Q = Q(t),$

$$f_b(Q) = \frac{A_0Q(B_0 - C_0) + C_0Q_0}{C_0Q(B_0 - A_0) + A_0Q_0},$$

$$g_b(Q) = \frac{C_0Q_0 + Q(B_0 - C_0)}{C_0Q_0},$$

$$h_b(Q) = \frac{QC_0B_0}{Q(B_0 - A_0) + Q_0A_0};$$

2в) $P = 0, C = Af_c(R), A = A(t), B = Ag_c(R), Q = h_c(R), R = R(t),$

$$f_c(R) = \frac{B_0R(C_0 - A_0) + A_0R_0}{A_0R(C_0 - B_0) + B_0R_0},$$

$$g_c(R) = \frac{A_0R_0 + R(C_0 - A_0)}{A_0R_0},$$

$$h_c(R) = \frac{RA_0C_0}{R(C_0 - B_0) + R_0B_0}.$$

Условия (2а)–(2в) получаются одно из другого в результате циклической перестановки соответствующих параметров.

Интегрирование задачи (2а) осуществим на основе уравнений (4). При $Q = 0$ из первого и третьего уравнений этой системы следует дифференциальное соотношение

$$\varkappa^2 \frac{d\lambda}{d\nu} = \frac{\nu^* + \nu}{\lambda^* + \lambda},$$

где

$$\varkappa^2 = \frac{C(B - A)}{A(C - B)}, \quad \nu^* = \frac{BR}{C - B}, \quad \lambda^* = \frac{PB}{A - B}. \quad (13)$$

Предположим теперь, что величины (13) сохраняют постоянные значения, т.е.

$$\begin{aligned} \varkappa^2 &= \frac{C_0(B_0 - A_0)}{A_0(C_0 - B_0)}, \\ \nu^* &= \frac{B_0R_0}{C_0 - B_0}, \quad \lambda^* = \frac{P_0B_0}{A_0 - B_0}, \end{aligned} \quad (14)$$

тогда задача имеет первый интеграл

$$\varkappa^2(\lambda^* + \lambda)^2 = (\nu^* + \nu)^2 + L^2, \quad (15)$$

где постоянная интегрирования

$$L^2 = \varkappa^2(\lambda^* + \lambda_0)^2 - (\nu^* + \nu_0)^2. \quad (16)$$

Интеграл (15) позволяет завершить интегрирование и представить общее решение задачи в следующей форме:

$$\begin{aligned} \lambda(\nu) &= \varkappa^{-1} \left\{ -\lambda^* \pm \sqrt{L^2 - (\nu^* + \nu)^2} \right\}, \\ \mu(\nu) &= \pm \sqrt{G^2 - \nu^2 - \frac{1}{\varkappa^2} \left(-\lambda^* \pm \sqrt{L^2 - (\nu^* + \nu)^2} \right)^2}, \\ \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{d\nu}{(\lambda^* + \lambda(\nu))\mu(\nu)} &= \int_{t_0}^t \frac{B(t) - A(t)}{A(t)B(t)} dt. \end{aligned} \quad (17)$$

В решении (17) произвольными функциями времени являются один из осевых моментов инерции ($B(t)$) и одна из компонент вектора кинетического момента относительного движения частиц тела $\mathbf{G}^{(r)}$ ($P(t)$). В случаях (2а)–(2в) тело не является осесимметричным, а его вектор \mathbf{G}^r не совпадает с осью $C\zeta$ тела.

3°. Решение задачи Лиувилля легко сводится к решению задачи Эйлера–Пуансо в следующих трех случаях, когда при $P = 0, Q = 0, R = 0$:

$$\begin{aligned} 3а) \quad \frac{C - B}{B - A} \cdot \frac{A}{C} &= \frac{C_0 - B_0}{B_0 - A_0} \cdot \frac{A_0}{C_0}, \\ 3б) \quad \frac{A - C}{C - B} \cdot \frac{B}{A} &= \frac{A_0 - C_0}{C_0 - B_0} \cdot \frac{B_0}{A_0}, \\ 3в) \quad \frac{B - A}{A - C} \cdot \frac{C}{B} &= \frac{B_0 - A_0}{A_0 - C_0} \cdot \frac{C_0}{B_0}. \end{aligned} \quad (18)$$

Эти условия следуют из более общих условий (2а)–(2в), если кинетический момент $\mathbf{G}^r = 0$.

Например, в случае (3а) первые интегралы задачи принимают вид

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = G^2, \quad \varkappa^2 \lambda^2 - \nu^2 = L^2, \quad (19)$$

и решение задачи сводится к обращению квадратуры

$$\int_{\nu_0}^{\nu} \frac{\varkappa^2 d\nu}{\sqrt{(L^2 + \nu^2)[\varkappa^2 G^2 - L^2 - (1 + \varkappa^2)\nu^2]}} = \int_{t_0}^t \frac{A(t) - C(t)}{A(t)C(t)} dt. \quad (20)$$

В решениях (18)–(20) накладывается лишь одно ограничение на осевые моменты инерции, т.е. два из трех осевых моментов инерции тела являются произвольными функциями времени.

Аналогичные результаты получаются на основе уравнений движения (6). В случае (3а) они принимают вид уравнений задачи Эйлера–Пуансо, однако здесь A , B , C являются функциями времени:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= G \sin \theta \sin l \cos l \left(\frac{1}{A(t)} - \frac{1}{B(t)} \right), \\ \frac{dl}{dt} &= G \cos \theta \left(\frac{1}{C(t)} - \frac{\cos^2 l}{B(t)} - \frac{\sin^2 l}{A(t)} \right), \\ \frac{dg}{dt} &= G \left(\frac{\sin^2 l}{A(t)} + \frac{\cos^2 l}{B(t)} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $G = G_0 = \text{const}$ и решение уравнений (21) представляется формулами

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta (1 + \varkappa^2 \sin^2 l) &= C_1 = \text{const}, \\ \tau - \tau_0 &= \int_{l_0}^l \frac{dl}{\sqrt{\left(\frac{1}{\varkappa^2} - C_1 + \sin^2 l\right) \left(\frac{1}{\varkappa^2} + \sin^2 l\right)}}, \\ g - g_0 &= G \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{B(t)}{A(t) - B(t)} d\tau + G \int_{\tau_0}^{\tau} \cos^2 l d\tau, \end{aligned} \quad (22)$$

где новая независимая переменная

$$\tau = \int \left(\frac{1}{B(t)} - \frac{1}{A(t)} \right) dt. \quad (23)$$

Вместо постоянной интегрирования целесообразно ввести в рассмотрение величину

$$\lambda^2 = \frac{C_1 \varkappa^2}{1 + \varkappa^2 - C_1},$$

т.е. положить $C_1 = \frac{\lambda^2(1 + \varkappa^2)}{\varkappa^2 + \lambda^2}$.

В работе [8] решение задачи Эйлера–Пуансо было представлено рядами Фурье в канонических переменных Андуайе. Если воспользоваться этими результатами, то решение рассматриваемой задачи можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} L = G \cos \theta &= G \frac{\pi \varkappa}{K \sqrt{\varkappa^2 + \lambda^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m\varphi)}{\text{ch}(2md)} (1 + \delta_{m_0})^{-1}, \\ \delta_{m_0} &= \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0, \\ 0 & \text{при } m \neq 0, \end{cases} \\ l &= \varphi + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{ch}(m\sigma)}{m \text{ch}(2md)} \sin(2m\varphi), \\ g &= \psi + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sh}(m\sigma)}{m \text{sh}(2md)} \sin(2m\varphi), \end{aligned} \quad (24)$$

где φ , ψ — два новых аргумента, являющихся известными функциями времени:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{G}{2} \frac{\pi}{\varkappa} \sqrt{\frac{1 + \varkappa^2}{\varkappa^2 + \lambda^2}} \frac{1}{K(\lambda)} \tau, \\ \psi &= G \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{B(t)}{A(t) - B(t)} d\tau - \frac{G\pi}{\varkappa} \sqrt{\frac{1 + \varkappa^2}{\varkappa^2 + \lambda^2}} \frac{\Pi(\varkappa^2, \lambda)}{K(\lambda)} \tau. \end{aligned} \quad (25)$$

В формулах (24), (25) K и Π — полные эллиптические интегралы первого и третьего рода; $\text{ch } u$, $\text{sh } u$ — гиперболические функции, аргументы которых определяются с помощью формул

$$d = \frac{\pi K'}{2K}, \quad \sigma = \frac{\pi}{2K} F \left(\arctg \frac{\varkappa}{\lambda}, \sqrt{1 - \lambda^2} \right),$$

где $K' = K(\sqrt{1 - \lambda^2})$, F — неполный эллиптический интеграл первого рода.

4°. О других интегрируемых случаях. Некоторые случаи интегрируемости задачи Лиувилля удобно проиллюстрировать на основе канонических уравнений в переменных Андуайе. Гамильтониан этих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \left[L^2 \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 l}{A} - \frac{\cos^2 l}{B} \right) + \right. \\ &\quad \left. + G^2 \left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) \right] - \\ &- \frac{P}{A} \sqrt{G^2 - L^2} \sin l - \frac{Q}{B} \sqrt{G^2 - L^2} \cos l - \frac{R}{C} L. \end{aligned}$$

Легко видеть, что задача сводится к одностепенной автономной гамильтоновой в случае

$$\begin{aligned} A &= A_0 f(t), \quad B = B_0 f(t), \quad C = C_0 f(t), \\ P &= P_0, \quad Q = Q_0, \quad R = R_0, \end{aligned}$$

где индекс обозначает постоянные, например начальные значения соответствующих величин, $f(t)$ — некоторая произвольная функция. Если ввести новую независимую переменную соотношением $d\tau = dt/f(t)$, то уравнения в переменных Андуайе запишутся в каноническом виде с гамильтонианом $F' = F'f(t)$. Для $f(t) = 1$ решение этих уравнений соответствует известному случаю интегрируемости Вольтерра, который при $P_0 = Q_0 = R_0 = 0$ отмечался Лиувиллем, Тиссераном [1, 2] и др.

На основе данной работы более детальное исследование интегрируемости задачи Лиувилля выполнил А. В. Борисов [9].

Литература

1. *Liouville J.* // J. Math. Pures et Appliquées. 1858. Ser. 2, V. III. P. 1.
2. *Tisserand F.* Traité de Mécanique Céleste. Paris: Gauthier-Villars, 1891. V. II, ch. XXX.

3. *Баркин Ю.В., Демин В.Г.* // Тез. докл. 8-й Республ. межвуз. науч. конф. по математике и механике (Алма-Ата, 4–6 сентября 1984). Ч. III: Теоретическая и прикладная механика. Алма-Ата (КазГУ), 1984. С. 10.
4. *Barkin Yu.V.* // Proc. Intern. Conf. «Earth Rotation Reference Systems in Geodynamics and Solar System» (Warsaw, Poland, September 18-20, 1995). Journees 1995. SRC, PAS, Warsaw, Poland, 1996. P. 159.
5. *Bursa M., Sidlichovsky M.* // Bull. Astron. Inst. Czechosl. 1985. **36**. P. 24.
6. *Bainum P.M., Sellappan R.* // Acta Astronautica. 1976. **3**. P. 953.
7. *Johnson D.A.* // Int. J. Systems Sci. 1976. **7**, No. 12. P. 1377.
8. *Barkin Yu.V.* // Proc. Intern. Conf. «Earth Rotation Reference Systems in Geodynamics and Solar System» (Warsaw, Poland, September 18-20, 1995). Journees 1995. SRC, PAS, Warsaw, Poland, 1996. P. 83.
9. *Борисов А.В.* // Численное моделирование в задачах механики. М. (МГУ), 1991. С. 110.

Поступила в редакцию
23.05.97