К Р А Т К И Е   С О О Б Щ Е Н И Я

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.1451

КОВАРИАНТНЫЙ КВАРКОВЫЙ МЕШОК И ВЕКТОРНАЯ АНОМАЛИЯ

К. А. Свешников, И. О. Чередников

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Сформулирован явно ковариантный формализм для гибридных киральных моделей кварковых мешков в 1+1 измерениях. Показано, что в этом подходе эффект перетекания фермионного заряда через границу между фазами является прямым следствием полевых уравнений и граничных условий.

Одной из наиболее принципиальных проблем гибридных киральных моделей кварковых мешков [1,2] является отсутствие явной лоренц-ковариантности, связанное с наличием в теории наряду с квантовыми нетривиальных классических объектов, таких как поверхность мешка и солитонное решение для мезонной составляющей. Наиболее адекватным способом восстановления явной ковариантности в данном случае является обобщение метода коллективных координат Н. Н. Боголюбова [3], состоящее в ковариантном выделении переменных центра инерции системы непосредственно на квантовом уровне. Чтобы осуществить этот переход, введем операторно-значную функцию $\xi(x,t) = Hx - Pt - L$, где H — полный гамильтониан мешка, L — генератор лоренцевых вращений и P — генератор пространственных трансляций мешка как целого, образующие 1+1-мерную алгебру Пуанкаре

$$[H,P]=0, \quad [L,P]=i\hbar H, \quad [L,H]=i\hbar P. \qquad (1)$$

Под действием преобразований группы Пуанкаре $\xi(x,t)$ ведет себя как действительное скалярное поле $U^{+}(\Lambda,a)\xi(x)U(\Lambda,a) = \xi(\Lambda^{-1}(x-a))$. Отсюда следует, что при замене $x \to \xi(x,t)$ любая c-числовая функция от x становится ковариантным оператором по отношению к алгебре (1), что явно восстанавливает лоренц-ковариантность для всех стационарных классических объектов, которые необходимо учесть.

В моделях мешков первым приближением являются конфигурации, стационарные в с.ц.м. мешка. Переход в с.ц.м. для таких полей имеет вид $\phi(x,t) \to \to D\Phi(\xi(x,t))$, $U^{+}(\Lambda,a)DU(\Lambda,a) = S(\Lambda)D$, где $\Phi(\xi)$ — полевые переменные в с.ц.м., а D реализует соответствующее конечномерное представление группы Лоренца. Преобразование производных полей $\partial_\mu\phi$ к инвариантным переменным осуществляется через вычисление коммутаторов с генераторами трансляций $\partial_\mu \to i/\hbar[P_\mu,\ \cdot\ ]$. С учетом алгебры (1) можно показать [3], что в терминах $\Phi(\xi)$ дифференциальные операторы ∂_μ становятся операторами конечных разностей $[\Phi(\xi \pm i\hbar) - \Phi(\xi)]/i\hbar$, где $\hbar$ — эффективная постоянная Планка, входящая в канонические коммутационные соотношения. Таким образом, любой функционал поля ϕ и его первых производных $\partial_\mu\phi$ в терминах полей в с.ц.м. $\Phi(\xi)$ переписывается как $j\ [\phi(x),\partial_\mu\phi(x)] \to J\ [\Phi,\Phi_+,\Phi_-]$, где $\Phi_\pm = \Phi(\xi \pm i\hbar)$. Точно так же уравнения движения, выраженные через $\Phi(\xi)$, содержат $[\Phi(\xi\pm i\hbar)-\Phi(\xi)]/i\hbar$ вместо производных и становятся уравнениями в конечных разностях. Переход к пределу $\hbar \to 0$ восстанавливает классические локальные уравнения для полей в с.ц.м.

Данный подход позволяет ввести границу мешка без потери ковариантности с помощью разбиения инвариантного ξ-пространства на две части, соответствующие внутреннему и внешнему секторам мешка в с.ц.м. Полное действие мешка представляет собой сумму вкладов от внешнего и внутреннего секторов, а также дополнительных членов, определенных на границе раздела между фазами.

Вычислим поверхностные члены для конечно-разностного действия $A_{\text{left}}[\Phi] = \int\limits_{-\infty}^{\xi_0} d\xi\ \mathcal{L}[\Phi,\Phi_\pm]$, определенного слева от граничной точки $+\xi_0$, с учетом аналитичности полей в комплексной полосе $|\,\mathrm{Im}(\xi)| < \hbar$ [4]. В моделях мешков поля в каждом из секторов должны удовлетворять своим уравнениям Лагранжа–Эйлера. Таким образом, условие $\delta A_{\text{left}} = 0$ вместе с уравнением движения приводит к однозначному выделению поверхностного члена $\int\limits_{-\infty}^{\xi_0} d\xi\ \delta\Delta[\Phi,\Phi_\pm]$, который должен быть исключен с помощью дополнительного граничного действия. Для произвольного действия прямое вычисление дает поверхностный член:

$$\int\limits_{-\infty}^{\xi_0} d\xi\,\delta\Delta[\Phi] = \int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+i\hbar} d\xi\,\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi_+}\right)_-\delta\Phi + \int\limits_{\xi_0}^{\xi_0-i\hbar} d\xi\,\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi_-}\right)_+\delta\Phi.$$

Это выражение получено с помощью деформации контуров интегрирования в комплексной ξ-плоскости и использования теоремы Коши. Такая же формула имеет место и для поверхностного члена, соответствующего полям, заданным справа от ξ_0. То, что граничные условия, связывающие поля с разных сторон от ξ_0, должны задаваться на мнимом отрезке $[\xi_0 - i\hbar, \xi_0 + i\hbar]$, накладывает значительно более сильные ограничения на поля, чем в локальном случае.

Рассмотрим теперь простейшую конфигурацию, когда слева от ξ_0 находятся безмассовые дираковские фермионы без ароматов с плотностью лагранжиана $\mathcal{L}_f = i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi$, а справа от ξ_0 — действительное скалярное поле с нелинейным самодействием $\mathcal{L}_b = (1/2)(\partial\phi)^2 - V(\phi)$, обладающее солитоноподобным классическим решением. В терминах инвариантных полей действия имеют вид

$$A_f[\Psi, \bar{\Psi}] = -\frac{M}{4\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\xi_0} d\xi\ \bar{\Psi}\Big[\gamma^0(2\Psi - \Psi_+ - \Psi_-) - \gamma^1(\Psi_+ - \Psi_-)\Big] + (\text{э.с.}),$$

$$A_b[\Phi] = \int\limits_{\xi_0}^{\infty} d\xi\left\{-\frac{M^2}{4\hbar^2}[(\Phi - \Phi_+)^2 + (\Phi - \Phi_-)^2] - V(\Phi)\right\},$$

где M — полная масса мешка. Кирально инвариантное граничное действие, которое должно быть добавлено к сумме $A_f + A_b$, имеет вид

$$A_{\text{on}} = \frac{M}{2i\hbar}\left(\int\limits_{\xi_0}^{\xi_0 + i\hbar} d\xi\ \bar{R}U^{\gamma_5}_{(-)}L - \int\limits_{\xi_0}^{\xi_0 - i\hbar} d\xi\ \bar{L}U^{\gamma_5}_{(+)}R\right), \quad (2)$$

где $U^{\gamma_5}_{(\pm)} = \exp[i\lambda(\Phi + \Phi_\pm)\gamma_5/2]$. Здесь использованы правые и левые спиноры R и L, а λ — произвольная безразмерная константа связи. Варьирование (2) с учетом поверхностных членов дает следующие граничные условия для полей:

$$\begin{aligned} &R_- = i\gamma^0 U^{\gamma_5}_{(-)}L, \quad L^+_- = iR^+\gamma^0 U^{\gamma_5}_{(-)}, \\ &\frac{M}{\hbar}(\Phi - \Phi_-) = i\lambda R^+ R_- = i\lambda L^+_- L \end{aligned} \quad (3)$$

на отрезке $[\xi_0, \xi_0 + i\hbar]$ и сопряженные им на $[\xi_0 - i\hbar, \xi_0]$. В пределе $\hbar \to 0$ мнимый отрезок $[\xi_0 - i\hbar, \xi_0 + i\hbar]$ стягивается в точку ξ_0 и (3) переходит в стандартные условия бозонизации [1,5]. Однако для конечного $\hbar$ эти граничные условия содержат значительно больше информации, а именно: единственность аналитического продолжения через конечный отрезок полей с разных сторон границы приводит к взаимно-однозначному соответствию между различными полями, что является дальнейшим расширением бозонно-фермионной эквивалентности и накладывает существенные ограничения на динамику полей по обе стороны границы.

Развитый формализм позволяет также легко вычислить так называемую векторную аномалию. В стандартном подходе с помощью регуляризации фермионного тока $j^\mu = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ и учета граничных условий устанавливается, что скорость перетекания фермионного заряда из мешка через границу пропорциональна производной по времени от скалярного поля ϕ на границе [5]. В нашем подходе векторный ток дается формулой $J^\mu = (1/2M)\{K_+\bar{\Psi}_-\gamma^\mu\Psi + K_-\bar{\Psi}_+\gamma^\mu\Psi + \varepsilon^{\mu\nu}[K_-\bar{\Psi}_+\gamma_\nu\Psi - K_+\bar{\Psi}_-\gamma_\nu\Psi]\}$, где $K_\pm = H \pm P$, и является хорошо определенным оператором вследствие сдвига аргументов в комплексную ξ-плоскость. Скорость утечки фермионного заряда $Q = \int\limits_{-\infty}^{\xi_0} d\xi J^0$ из мешка находим сведением пути интегрирования к граничному отрезку $[\xi_0 - i\hbar, \xi_0 + i\hbar]$ и учета граничных условий (3), что дает

$$\partial_t Q = -\frac{i}{2\hbar\lambda M}\partial_t\left[\int\limits_{\xi_0}^{\xi_0 + i\hbar} d\xi K_-\Phi - \int\limits_{\xi_0}^{\xi_0 - i\hbar} d\xi K_+\Phi\right]. \quad (4)$$

Усредняя (4) по состояниям с нулевым полным импульсом $P = 0$, в пределе $\hbar \to 0$ находим $\langle P = 0\,|\partial_t Q|\ P = 0\rangle = \lambda^{-1}\partial_t\Phi(\xi_0)$ в соответствии с известным выражением для векторной аномалии [5]. Отметим, что векторная аномалия возникает здесь не как квантово-полевой, а чисто квантовомеханический эффект, будучи прямым следствием конечно-разностной структуры динамики инвариантных полей и задания граничных условий на мнимом отрезке.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 96-02-18097, 96-15-96674) и Санкт-Петербургского конкурсного центра (грант 95-0-6.3-20).

Литература

1. *Rho M.* // Phys. Reports. 1994. **C240**. P. 1
2. *Hosaka A., Toki H.* // Phys. Reports. 1996. **C277**. P. 65.
3. *Sveshnikov K.* // Phys. Lett. 1990. **B136**. P. 1.
4. *Sveshnikov K., Silaev P.,Cherednikov I.* // Mod. Phys. Lett. 1997. **A12**. P. 465.
5. *Nadkarni S., Nielsen H.B.,Zahed I.* // Nucl. Phys. 1986. **B263**. P. 1.

Поступила в редакцию
22.10.97