

УДК 519.95

## ЭФФЕКТИВНЫЙ РАНГ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УЛИТКИ ОРГАНА СЛУХА

С. Н. Качало, Ю. П. Пытьев

(кафедра компьютерных методов физики)

Рассматривается математическая модель улитки органа слуха как оператор, преобразующий временной сигнал к пространственно-временной форме, и исследуется его эффективный ранг.

## Введение

Для анализа звукового сигнала может оказаться удобным его преобразование к так называемой пространственно-временной форме, имеющее место в живой природе и производимое органами слуха человека и животных. Звуковая волна, распространяясь по гидродинамической системе внутреннего уха, порождает изменяющуюся во времени волну деформации вдоль основной мембраны улитки — центрального чувствительного элемента органа слуха. Таким образом, входящий звуковой сигнал, являющийся функцией только времени, преобразуется ухом к функции двух переменных — времени и координаты относительно начала основной мембраны. Подобное преобразование дает возможность перейти от быстропеременного звукового сигнала к сигналу, изменяющемуся достаточно медленно для того, чтобы он мог восприниматься нервной системой. Кроме этого, появляется возможность судить о характере слышимого звука по состоянию основной мембраны в каждый отдельный момент времени.

Принимая во внимание линейность преобразования звукового сигнала органом слуха в достаточно широком диапазоне амплитуд, это преобразование можно представить в векторной форме:

$$\xi = \mathbf{A}f + \nu, \quad (1)$$

где  $f \in \mathcal{F}$  — входной сигнал,  $\xi \in \mathcal{R}$  — выходной сигнал,  $\nu \in \mathcal{R}$  — шум,  $\mathbf{A}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{R}$  — линейный оператор, моделирующий улитку органа слуха. Модель  $[\mathbf{A}, \Sigma]$  измерения, выполняемого по схеме (1), предполагает, что  $\nu$  — случайный вектор с математическим ожиданием  $\mathbf{E}\nu = 0$  и ковариационным оператором  $\Sigma$ .

Разобьем основную мембрану улитки вдоль ее длины на  $N$  равных участков. (В использованной численной модели было принято  $N = 200$ .) Входной звуковой сигнал можно представить как дискретный набор значений звукового давления в моменты времени  $t = iT$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , или как набор комплексных коэффициентов при гармонических составляющих сигнала. (Для представления звукового сигнала длительностью 0,05 с в частотном диапазоне до 5 кГц необходимо  $n = 500$  отсчетов, или 250 комплексных коэффициентов.) Евклидовы пространства  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{R}$  в этом случае можно определить как множества всех векторов вида

$(f_1, f_2, \dots, f_N)$  и  $(\xi_{1,1}, \xi_{1,2}, \dots, \xi_{n,N})$  соответственно, где  $f_i$  — значение входного сигнала в момент времени  $t = iT$  или комплексный коэффициент при его  $i$ -й гармонике, а  $\xi_{i,j}$  — величина смещения  $j$ -го участка мембраны ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) в момент  $t = iT$  или комплексный коэффициент при  $i$ -й гармонике разложения этого отклонения в гармонический ряд Фурье.

Таким образом, при размерности входного сигнала 500 выходной сигнал имеет размерность 100 000. Очевидно, что выходной сигнал не может нести информации больше, чем ее содержится во входном сигнале. Для оценки реальной размерности выходного сигнала улитки может быть использовано понятие эффективного ранга модели  $[\mathbf{A}, \Sigma]$ , введенное в [1] и являющееся обобщением понятия классического ранга оператора  $\mathbf{A}$ , позволяющим учесть влияние ошибок измерения  $\nu$ .

Эффективным рангом модели  $[\mathbf{A}, \Sigma]$  называется функция  $\rho(\cdot): [0, \infty) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ , значение  $\rho(\epsilon)$  которой равно максимальной размерности ортогональной составляющей  $\Pi^{(\epsilon)} f$  сигнала  $f \in \mathcal{F}$ , которая может быть определена на основании измерения  $\xi$  с погрешностью, не превосходящей  $\epsilon \geq 0$ .

Согласно [2], в линейном пространстве  $\mathcal{F}$  входных сигналов может быть определен так называемый собственный базис модели  $[\mathbf{A}, \Sigma]$ , т.е. ортонормированный базис  $\{e_i\}$ , состоящий из собственных векторов оператора  $\mathbf{A}^* \Sigma^{-1} \mathbf{A}$ , упорядоченных по убыванию соответствующих им собственных значений, и обладающий следующим свойством: линейная оболочка первых  $k$  векторов этого базиса характеризуется минимальным (среди всех линейных подпространств той же размерности) значением среднеквадратичной погрешности оценивания содержащихся в ней ортогональных составляющих сигнала  $f$ .

Минимальная среднеквадратичная погрешность оценивания  $k$ -мерной ортогональной составляющей входного сигнала  $f$  равна  $h = \sum_{i=1}^k \delta_i^{-2}$ , где  $\delta_i^2$  — собственное значение оператора  $\mathbf{A}^* \Sigma^{-1} \mathbf{A}$ , соответствующее вектору базиса  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, s = \text{rank } \mathbf{A}$ ,  $k \leq s$ . Соответственно эффективный ранг модели  $[\mathbf{A}, \Sigma]$  есть

$$\rho(\varepsilon) = \begin{cases} \max \left\{ k \mid \sum_{i=1}^k \delta_i^{-2} \leq \varepsilon \right\}, & \text{если } \delta_1^{-2} \leq \varepsilon, \\ 0, & \text{если } \delta_1^{-2} > \varepsilon, \quad \varepsilon \leq 0 < \infty. \end{cases}$$

**Описание модели**

В работе [3] приведено описание электрической схемы, моделирующей поведение основной мембраны улитки органа слуха (рис. 1). Напряжение  $U_0$  на входе схемы соответствует звуковому давлению. Напряжения  $U_i, i = 1, 2, \dots, N$ , на выходах характеризуют поперечные смещения участков основной мембраны на разных расстояниях от ее начала.

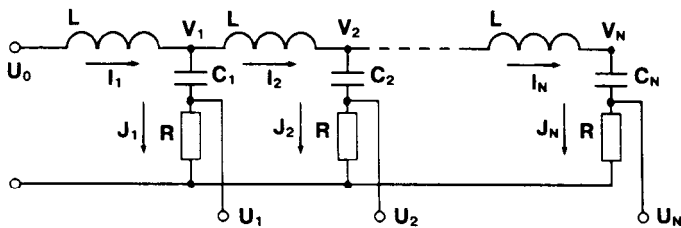


Рис. 1. Принципиальная схема электрической модели основной мембраны улитки органа слуха

В настоящей работе рассмотрена математическая модель цепи, состоящей из звеньев, имеющих следующие параметры:  $R = 1$  Ом,  $L = 8 \cdot 10^{-5}$  Гн,  $C_i = C_0 e^{\alpha(i-1)}$ , где  $C_0 = 8 \cdot 10^{-7}$  Ф и  $\alpha = 5,5 \cdot 10^{-2}$ , и исследован эффективный ранг модели. Параметры цепи были подобраны с таким расчетом, чтобы ее частотно-амплитудные характеристики (рис. 2) оказались достаточно близки к экспериментальным характеристикам улитки человеческого уха, приведенным в работе [3].

Рассматриваемая модель описывается системой дифференциальных уравнений для напряжений и токов в цепи, приведенной на рис. 1:

$$J_k = \frac{U_k}{R} = C_k \frac{d}{dt}(V_k - U_k),$$

$$V_k = V_{k-1} - L \frac{d}{dt} I_k = U_0 - L \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^k I_i \right),$$

$$I_k = \sum_{i=k}^N J_i, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

которая после исключения  $V_i, I_i$  и  $J_i$  приводится к виду

$$U_k + RC_k \frac{d}{dt} U_k + LC_k \frac{d^2}{dt^2} \left( \sum_{i=1}^k \sum_{n=i}^N U_n \right) = RC_k \frac{d}{dt} U_0,$$

$$k = 1, 2, \dots, N. \tag{2}$$

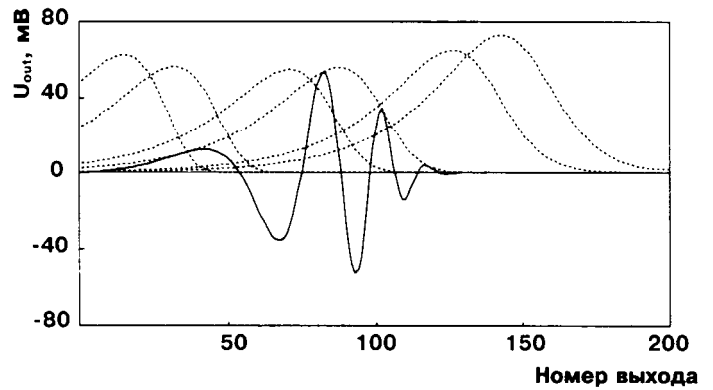


Рис. 2. Зависимость амплитуды выходного сигнала от номера выхода при подаче на вход цепи гармонического сигнала единичной амплитуды на частоте 50 Гц, 100 Гц, 500 Гц, 1 кГц, 5кГц и 10 кГц (пунктирные линии). Крайняя справа кривая соответствует минимальной частоте, крайняя слева — максимальной. Сплошной линией обозначена действительная составляющая выходного сигнала при частоте входного сигнала 500 Гц

В работе исследуются два режима работы улитки. Первый, для которого характерны переходные процессы, описывается задачей Коши для системы (2), в которой в начальный момент  $t = 0$  считаются выполненными следующие условия:

$$U_k = 0, \quad \frac{d}{dt} U_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \tag{3}$$

и рассматривается эволюция системы для  $t > 0$ .

При втором режиме, который можно назвать стационарным, начальные условия задаются при  $t = -\infty$ , переходные процессы к моменту наблюдения считаются затухшими, и исследуются решения системы (2) при периодическом входном сигнале  $U_0$ .

**Случай переходного процесса**

Рассмотрим вначале задачу Коши (2), (3). Для ее численного решения система (2) с помощью подстановки

$$\frac{d}{dt} U_k = \frac{U_{k,\tau} - U_{k,\tau-1}}{T},$$

$$\frac{d^2}{dt^2} U_k = \frac{U_{k,\tau} - 2U_{k,\tau-1} + U_{k,\tau-2}}{T^2},$$

$$\frac{d}{dt} U_0 = f_\tau, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

преобразуется к дискретному виду

$$\mathbf{F}U^\tau = \mathbf{G}U^{\tau-1} + \mathbf{H}U^{\tau-2} + \mathbf{1}f_\tau,$$

где  $U^\tau$  —  $N$ -мерный вектор выходных сигналов в момент времени  $t = \tau T$ , а  $\mathbf{F}, \mathbf{G}$  и  $\mathbf{H}$  — матрицы

размерности  $N \times N$  такие, что

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}U^\tau)_k &= \frac{1}{RC_k}U_{k,\tau} + \frac{1}{T}U_{k,\tau} + \frac{L}{RT^2} \sum_{i=1}^k \sum_{n=i}^N U_{n,\tau}, \\ (\mathbf{G}U^{\tau-1})_k &= \frac{1}{T}U_{k,\tau-1} + \frac{2L}{RT^2} \sum_{i=1}^k \sum_{n=i}^N U_{n,\tau-1}, \\ (\mathbf{H}U^{\tau-2})_k &= -\frac{L}{RT^2} \sum_{i=1}^k \sum_{n=i}^N U_{n,\tau-2}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \\ \mathbf{1} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Начальные условия (3) записываются как  $U^\tau = 0$  при  $\tau = -1, -2$  и приводят к рекуррентному соотношению для нахождения выходного сигнала как отклика на входной сигнал  $f_\tau^0 = \begin{cases} 1, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases}$ :

$$U_0^0 = u_0 = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{1}, \quad U_0^1 = u_1 = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}u_0,$$

$$U_0^\tau = u_\tau = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}u_{\tau-1} + \mathbf{F}\mathbf{H}u_{\tau-2}.$$

Откликом на сигнал  $f_\tau^\eta = \begin{cases} 1, & \tau = \eta, \\ 0, & \tau \neq \eta, \end{cases}$  будет

$$U_\eta^\tau = \begin{cases} u_{\tau-\eta}, & \tau \geq \eta, \\ 0, & \tau < \eta. \end{cases}$$

При численных расчетах исследованы входные сигналы с параметрами, характерными для речевого сигнала, информативная часть которого расположена в частотном диапазоне до 5 кГц, а минимальная длительность речевого сегмента — около 0,05 с [4]. Вектор входного сигнала  $f$  состоит из  $n = 500$  отсчетов. Временной шаг  $T = 10^{-4}$  с.

Значения  $u_\tau$  получены численно и организованы в виде матрицы:

$$\mathbf{A}_{k,\tau,\eta} = \begin{cases} u_{k,\tau-\eta}, & \tau \geq \eta \\ 0, & \tau < \eta \end{cases},$$

$$\tau, \eta = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

преобразующей  $n$ -мерный вектор входного сигнала в  $n \times N$ -мерный вектор выходного сигнала:

$$U_{k,\tau} = \sum_{\eta=0}^{\tau} \mathbf{A}_{k,\tau,\eta} f_\eta, \quad (4)$$

$$\tau = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Выражение (4) является решением задачи Коши (2), (3), матрица  $\mathbf{A}$  определяет оператор прибора в модели по схеме измерения (1).

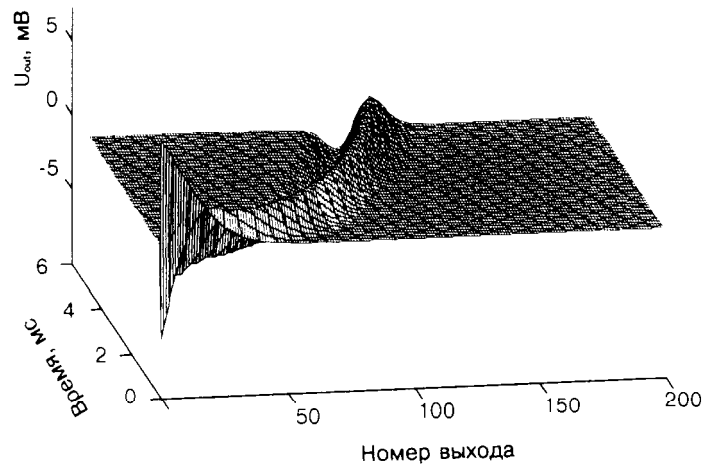


Рис. 3. Распространение сигнала вдоль основной мембраны улитки при подаче на вход в момент  $t = 0$  короткого импульса

На рис. 3 показано распространение сигнала вдоль основной мембраны улитки при подаче на ее вход в нулевой момент времени короткого импульса.

Допуская, что шум на выходах прибора на два порядка меньше характерной величины выходного сигнала при входном сигнале порядка нескольких вольт, в качестве ковариационного оператора шума можно принять  $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}$ , где  $\mathbf{I}$  — единичный оператор и  $\sigma = 10^{-3}$  В.

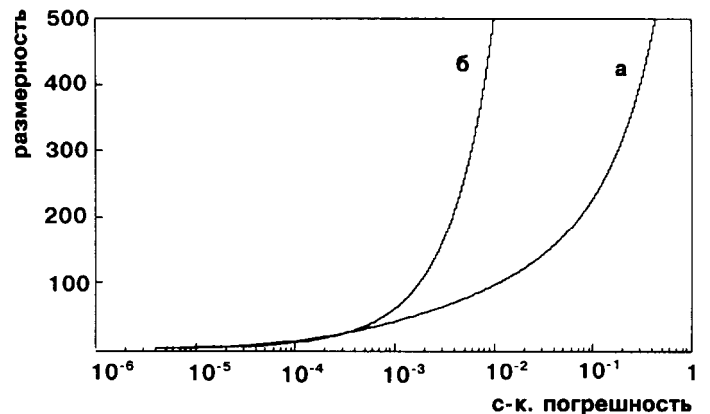


Рис. 4. Эффективный ранг модели  $[\mathbf{A}, \Sigma]$  в режиме переходного процесса (а) и в стационарном режиме (б)

Собственные значения оператора  $\mathbf{A}^* \Sigma^{-1} \mathbf{A}$  получены численно. Эффективный ранг модели  $[\mathbf{A}, \Sigma]$  показан на рис. 4 (а).

### Стационарный случай

Для изучения работы улитки в стационарном режиме удобно задавать входной и выходные сигналы как наборы коэффициентов гармонического ряда Фурье. Рассмотрим периодический входной сигнал длительности  $T$ , частотный спектр которого ограничен сверху величиной  $\Omega = 2n\pi/T$ . Входной и выходные сигналы будут иметь вид  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$

и  $(\xi_{1,1}, \xi_{1,2}, \dots, \xi_{n,N})$  соответственно, где  $f_i$  — комплексный коэффициент Фурье при частоте  $\omega = 2(i - 1)\pi/T$  в разложении входного сигнала, а  $\xi_{i,j}$  — коэффициент Фурье при частоте  $\omega = 2(i - 1)\pi/T$  в разложении выходного сигнала на  $j$ -м отводе улитки,  $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, N$ .

Оператор прибора в модели  $[\mathbf{A}, \Sigma]$  в стационарном случае описывается матрицей  $\mathbf{A}$ , имеющей  $nN$  строк и  $n$  столбцов, с комплексными коэффициентами такими, что

$$\xi_{k,j} = \sum_{\eta=1}^n \mathbf{A}_{k,j,\eta} f_{\eta}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Нетрудно видеть, что отличными от нуля являются только те коэффициенты  $A_{i,j,k}$  матрицы  $\mathbf{A}$ , где  $i = k$ , или, другими словами, при подаче на вход прибора гармонического сигнала какой-нибудь частоты на всех выходах будут наблюдаться сигналы той же самой частоты.

Наборы коэффициентов  $A_{i,j,i}, j = 1, 2, \dots, N$ , представляют собой амплитудные характеристики улитки при подаче на ее вход единичного гармонического сигнала на частоте  $\omega = 2(i - 1)\pi/T$ , подобные характеристике, показанной на рис. 2.

Выбрав, как и в предыдущем случае, ковариационный оператор шума  $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}, \sigma = 10^{-3}$  В, легко

убедиться, что оператор  $\mathbf{A}^* \Sigma^{-1} \mathbf{A}$  описывается диагональной матрицей, элементы которой равны

$$(\mathbf{A}^* \Sigma^{-1} \mathbf{A})_{i,i} = \sigma^2 \sum_{k=1}^N |A_{i,k,i}|^2, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Численные расчеты проведены для класса входных сигналов, удовлетворяющих условиям, аналогичным условиям предыдущей задачи: частотный диапазон сигнала ограничен 5 кГц, а период повторения сигнала  $T = 0,05$  с.

График эффективного ранга модели  $[\mathbf{A}, \Sigma]$  для стационарного случая приведен на рис. 4 (б).

**Литература**

1. Бондаренко С.П., Пытьев Ю.П. // ЖВМ и МФ. 1995. 35, № 1. С. 6.
2. Пытьев Ю.П. Математические методы интерпретации эксперимента. М., 1989.
3. Молчанов А.П., Бабкина Л.Н. Электрические модели механизмов улитки органов слуха. Л., 1978.
4. Сорокин В.Н. Синтез речи. М., 1992.

Поступила в редакцию  
06.06.97

УДК 517.956.224+517.968.23

## ПОТЕНЦИАЛЫ ДИССИПАТИВНОГО ВОЛНОВОДА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ

П. А. Крутицкий

(кафедра математики)

Рассматривается сингулярное решение двумерного диссипативного уравнения Гельмгольца в полосе, удовлетворяющее нулевым граничным условиям на стенках. Это решение, построенное методом отражений, представляется в виде ряда, один член которого — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца на плоскости, а остальные члены — гладкие решения уравнения Гельмгольца в полосе. Показано, что ряд, состоящий из гладких решений, представляет собой бесконечно дифференцируемую функцию. На основе построенного сингулярного решения в полосе сконструированы потенциалы простого и двойного слоя и угловой потенциал. Доказано, что свойства потенциалов полосы определяются поведением хорошо изученных потенциалов, построенных на фундаментальном решении для уравнения Гельмгольца.

### 1. Потенциалы диссипативного уравнения Гельмгольца в полосе

На плоскости  $x = (x_1, x_2) \in R^2$  рассмотрим полосу  $\Omega = \{x : -\infty < x_1 < \infty, 0 < x_2 < l\}$ . В полосе выделим произвольное множество точек  $\mathcal{D}$  такое, что расстояние от  $\mathcal{D}$  до ближайшей из прямых  $x_2 = 0, x_2 = l$  равно  $d > 0$ . Пусть, далее,  $x \in \bar{\Omega}, y = (y_1, y_2) \in \bar{\mathcal{D}}, k = k_1 + ik_2, k_2 > 0$ . Введем функцию

$$u(j, x, y) = \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ H_0^{(1)}(kr_-(x, y, n)) + (-1)^j H_0^{(1)}(kr_+(x, y, n)) \right], \quad j = 1, 2,$$

где  $r_{\pm}(x, y, n) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 \pm y_2 - 2nl)^2}$ , а  $H_0^{(1)}(z)$  — функция Ханкеля первого рода нулевого порядка [1]. Функция  $u(j, x, y)$  представляет собой сингулярное решение уравнения Гельмгольца  $\Delta u + k^2 u = 0$  в полосе  $\Omega$ , формально построен-