

и  $(\xi_{1,1}, \xi_{1,2}, \dots, \xi_{n,N})$  соответственно, где  $f_i$  — комплексный коэффициент Фурье при частоте  $\omega = 2(i - 1)\pi/T$  в разложении входного сигнала, а  $\xi_{i,j}$  — коэффициент Фурье при частоте  $\omega = 2(i - 1)\pi/T$  в разложении выходного сигнала на  $j$ -м отводе улитки,  $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, N$ .

Оператор прибора в модели  $[\mathbf{A}, \Sigma]$  в стационарном случае описывается матрицей  $\mathbf{A}$ , имеющей  $nN$  строк и  $n$  столбцов, с комплексными коэффициентами такими, что

$$\xi_{k,j} = \sum_{\eta=1}^n \mathbf{A}_{k,j,\eta} f_{\eta}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Нетрудно видеть, что отличными от нуля являются только те коэффициенты  $A_{i,j,k}$  матрицы  $\mathbf{A}$ , где  $i = k$ , или, другими словами, при подаче на вход прибора гармонического сигнала какой-нибудь частоты на всех выходах будут наблюдаться сигналы той же самой частоты.

Наборы коэффициентов  $A_{i,j,i}, j = 1, 2, \dots, N$ , представляют собой амплитудные характеристики улитки при подаче на ее вход единичного гармонического сигнала на частоте  $\omega = 2(i - 1)\pi/T$ , подобные характеристике, показанной на рис. 2.

Выбрав, как и в предыдущем случае, ковариационный оператор шума  $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}$ ,  $\sigma = 10^{-3}$  В, легко

убедиться, что оператор  $\mathbf{A}^* \Sigma^{-1} \mathbf{A}$  описывается диагональной матрицей, элементы которой равны

$$(\mathbf{A}^* \Sigma^{-1} \mathbf{A})_{i,i} = \sigma^2 \sum_{k=1}^N |A_{i,k,i}|^2, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Численные расчеты проведены для класса входных сигналов, удовлетворяющих условиям, аналогичным условиям предыдущей задачи: частотный диапазон сигнала ограничен 5 кГц, а период повторения сигнала  $T = 0,05$  с.

График эффективного ранга модели  $[\mathbf{A}, \Sigma]$  для стационарного случая приведен на рис. 4 (б).

**Литература**

1. Бондаренко С.П., Пытьев Ю.П. // ЖВМ и МФ. 1995. 35, № 1. С. 6.
2. Пытьев Ю.П. Математические методы интерпретации эксперимента. М., 1989.
3. Молчанов А.П., Бабкина Л.Н. Электрические модели механизмов улитки органов слуха. Л., 1978.
4. Сорокин В.Н. Синтез речи. М., 1992.

Поступила в редакцию  
06.06.97

УДК 517.956.224+517.968.23

## ПОТЕНЦИАЛЫ ДИССИПАТИВНОГО ВОЛНОВОДА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ

П. А. Крутицкий

(кафедра математики)

Рассматривается сингулярное решение двумерного диссипативного уравнения Гельмгольца в полосе, удовлетворяющее нулевым граничным условиям на стенках. Это решение, построенное методом отражений, представляется в виде ряда, один член которого — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца на плоскости, а остальные члены — гладкие решения уравнения Гельмгольца в полосе. Показано, что ряд, состоящий из гладких решений, представляет собой бесконечно дифференцируемую функцию. На основе построенного сингулярного решения в полосе сконструированы потенциалы простого и двойного слоя и угловой потенциал. Доказано, что свойства потенциалов полосы определяются поведением хорошо изученных потенциалов, построенных на фундаментальном решении для уравнения Гельмгольца.

### 1. Потенциалы диссипативного уравнения Гельмгольца в полосе

На плоскости  $x = (x_1, x_2) \in R^2$  рассмотрим полосу  $\Omega = \{x : -\infty < x_1 < \infty, 0 < x_2 < l\}$ . В полосе выделим произвольное множество точек  $\mathcal{D}$  такое, что расстояние от  $\mathcal{D}$  до ближайшей из прямых  $x_2 = 0, x_2 = l$  равно  $d > 0$ . Пусть, далее,  $x \in \bar{\Omega}, y = (y_1, y_2) \in \bar{\mathcal{D}}, k = k_1 + ik_2, k_2 > 0$ . Введем функцию

$$u(j, x, y) = \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ H_0^{(1)}(kr_-(x, y, n)) + (-1)^j H_0^{(1)}(kr_+(x, y, n)) \right], \quad j = 1, 2,$$

где  $r_{\pm}(x, y, n) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 \pm y_2 - 2nl)^2}$ , а  $H_0^{(1)}(z)$  — функция Ханкеля первого рода нулевого порядка [1]. Функция  $u(j, x, y)$  представляет собой сингулярное решение уравнения Гельмгольца  $\Delta u + k^2 u = 0$  в полосе  $\Omega$ , формально построен-

ное методом отражений и удовлетворяющее нулевым условиям Дирихле ( $j = 1$ ) либо Неймана ( $j = 2$ ) на стенках полосы. Выясним сходимость ряда и изучим свойства функции  $u(j, x, y)$ . Положим

$$u_0(j, x, y) = u(j, x, y) - \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr_-(x, y, 0)).$$

Заметим, что  $d \leq x_2 + y_2 \leq 2l - d$ ,  $-l + d \leq x_2 - y_2 \leq l - d$ ,

$$2l(|n| - 1) + d \leq |x_2 \pm y_2 - 2nl|, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Отсюда, воспользовавшись известным неравенством  $\sqrt{a^2 + b^2} \geq 2^{-1}(|a| + |b|)$ , получим

$$\begin{aligned} r_{\pm}(x, y, n) &\geq 2^{-1}(|x_1 - y_1| + |x_2 \pm y_2 - 2nl|) \geq \\ &\geq 2^{-1}|x_1 - y_1| + l(|n| - 1) + 2^{-1}d \geq 2^{-1}d, \quad (1) \\ n &= \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_+(x, y, 0) &\geq 2^{-1}(|x_1 - y_1| + d) \geq 2^{-1}d, \\ r_-(x, y, 0) &\geq |x_1 - y_1|. \quad (2) \end{aligned}$$

Пользуясь этими оценками, а также асимптотическим представлением для функций Ханкеля [1]:

$$\begin{aligned} H_{\nu}^{(1)}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left\{i\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right], \\ |z| &\rightarrow \infty, \quad \nu \geq 0, \end{aligned}$$

приходим к следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} \left|H_{\nu}^{(1)}(kr_{\pm}(x, y, n))\right| &\leq \frac{C(k_2, d, \nu)}{\sqrt{|x_1 - y_1| + d}} \times \\ &\times \exp(-k_2 2^{-1}|x_1 - y_1|) \exp(-k_2 l(|n| - 1)) \leq \quad (3) \\ &\leq C(k_2, d, \nu) d^{-1/2} \exp(-k_2 l(|n| - 1)), \quad |n| = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|H_{\nu}^{(1)}(kr_+(x, y, 0))\right| &\leq \\ &\leq \frac{C(k_2, d, \nu)}{\sqrt{|x_1 - y_1| + d}} \exp(-k_2 2^{-1}|x_1 - y_1|) \leq \quad (4) \\ &\leq C(k_2, d, \nu) d^{-1/2}, \end{aligned}$$

которые справедливы при  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $y \in \bar{\mathcal{D}}$ ,  $\nu \geq 0$ .

Из неравенств (1), (2) с учетом свойств функции Ханкеля вытекает, что все члены ряда в  $u_0(j, x, y)$  — непрерывные функции в области  $\bar{\Omega} \times \bar{\mathcal{D}}$ . Более того, известно, что производная функции Ханкеля с целым неотрицательным индексом представляется линейной комбинацией двух других функций Ханкеля с целыми неотрицательными индексами. Тем самым каждый член ряда в  $u_0(j, x, y)$  принадлежит классу гладкости  $C^{\infty}(\bar{\Omega} \times \bar{\mathcal{D}})$ .

Из оценок (3), (4) вытекает, что ряд в  $u_0(j, x, y)$  мажорируется сходящимся числовым рядом из экспонент, а значит, сходится абсолютно и равномерно в области  $\bar{\Omega} \times \bar{\mathcal{D}}$  по мажорантному признаку. При формальном почленном дифференцировании ряда  $u_0(j, x, y)$  будут возникать ряды из функций Ханкеля с целым неотрицательным индексом  $\nu$  от того же аргумента  $kr_{\pm}(x, y, n)$ . Все они также будут сходиться абсолютно и равномерно в  $\bar{\Omega} \times \bar{\mathcal{D}}$  в силу оценок (3), (4) по мажорантному признаку. Следовательно,  $u_0(j, x, y)$  принадлежит  $C^{\infty}(\bar{\Omega} \times \bar{\mathcal{D}})$  и производные  $\nabla_x^p \nabla_y^q u_0(j, x, y)$ ,  $p, q = 0, 1, 2, \dots$ , можно вычислять почленным дифференцированием под знаком ряда. Применяя к функции  $u_0(j, x, y)$  и ее производным оценки (3), (4), легко получить следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \left|\nabla_x^p \nabla_y^q u_0(j, x, y)\right| &\leq \\ &\leq \frac{C_0(k_2, d, p, q)}{\sqrt{|x_1 - y_1| + d}} \exp(-2^{-1}k_2|x_1 - y_1|), \quad (5) \end{aligned}$$

где  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $y \in \bar{\mathcal{D}}$ ,  $p, q = 0, 1, 2, \dots$ .

Из приведенных рассуждений вытекает

Л е м м а 1.

1) Функция  $u_0(j, x, y)$  принадлежит  $C^{\infty}(\bar{\Omega} \times \bar{\mathcal{D}})$ , удовлетворяет оценкам (5) и уравнению Гельмгольца

$$\Delta U + k^2 U = 0, \quad \Delta = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2. \quad (6)$$

2) Функция  $u(j, x, y)$  при  $x \neq y$  удовлетворяет уравнению (6). Кроме того,  $u(j, x, y)$  удовлетворяет граничным условиям

$$u|_{x_2=0} = u|_{x_2=l} = 0, \quad j = 1, \quad (7)$$

$$u_{x_2}|_{x_2=0} = u_{x_2}|_{x_2=l} = 0, \quad j = 2. \quad (8)$$

В том, что  $u_0(j, x, y)$  удовлетворяет (6), а также в справедливости п. (2) леммы можно убедиться непосредственной проверкой. При этом следует учесть, что если  $x_2 \rightarrow 0 + 0$  либо  $x_2 \rightarrow l - 0$ , а  $y \in \bar{\mathcal{D}}$ , то функция  $H_0^{(1)}(k|x - y|)$  непрерывно-дифференцируема. Кроме того, все ряды можно суммировать в произвольном порядке в силу их абсолютной и равномерной сходимости. Непосредственно из леммы 1 следует

Л е м м а 2. Пусть  $\bar{\mathcal{D}}$  — ограниченное множество, причем для точек  $y \in \bar{\mathcal{D}}$  справедлива оценка  $|y_1| < A$ . Тогда для точек  $x \in \bar{\Omega}$  таких, что  $|x_1| > A + A_1$ ,  $A_1 > 0$ , справедливы оценки

$$\begin{aligned} \left|\nabla_x^p \nabla_y^q u\right|, \quad \left|\nabla_x^p \nabla_y^q u_0\right| &\leq \\ &\leq \frac{C_1(k_2, d, p, q)}{\sqrt{|x_1|}} \exp(-k_2|x_1|/2), \quad (9) \end{aligned}$$

которые выполняются для  $p, q = 0, 1, 2, \dots$  равномерно по  $y \in \bar{\mathcal{D}}$ .

Пусть  $\mathcal{D}$  — ограниченное множество и пусть  $\Gamma = \{x : x(s) = (x_1(s), x_2(s)), s \in [a, b]\}$  — простая

гладкая замкнутая или разомкнутая кривая такая, что  $\Gamma \subset \mathcal{D}$ . Предположим, что на  $\Gamma$  выбрано непрерывное поле нормалей  $\mathbf{n}_x$ . Полагая  $\mu(\sigma) \in L_1(\Gamma)$ , построим потенциалы простого и двойного слоя [2]:

$$w_1[\mu](x) = \int_{\Gamma} \mu(\sigma) u(j, x, y(\sigma)) d\sigma = \frac{i}{4} \int_{\Gamma} \mu(\sigma) H_0^{(1)}(k|x - y(\sigma)|) d\sigma + \int_{\Gamma} \mu(\sigma) u_0(j, x, y(\sigma)) d\sigma, \quad (10)$$

$$w_2[\mu](x) = \int_{\Gamma} \mu(\sigma) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} u(j, x, y(\sigma)) d\sigma = \frac{i}{4} \int_{\Gamma} \mu(\sigma) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} H_0^{(1)}(k|x - y(\sigma)|) d\sigma + \int_{\Gamma} \mu(\sigma) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} u_0(j, x, y(\sigma)) d\sigma, \quad (11)$$

а также рассмотрим угловой потенциал [3]

$$v[\mu](x) = \int_{\Gamma} \mu(\sigma) V(j, x, \sigma) d\sigma = v_1[\mu](x) + v_0[\mu](x), \quad (12)$$

$$v_p[\mu](x) = \int_{\Gamma} \mu(\sigma) V_p(j, x, \sigma) d\sigma, \quad p = 0, 1,$$

где

$$V(j, x, s) = \int_a^s \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} u(j, x, y(\sigma)) d\sigma, \quad s \in [a, b], \quad (13)$$

$$V_1(j, x, s) = \frac{i}{4} \int_a^s \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} H_0^{(1)}(k|x - y(\sigma)|) d\sigma,$$

$$V_0(j, x, s) = \int_a^s \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} u_0(j, x, y(\sigma)) d\sigma, \quad s \in [a, b].$$

Полагая  $\rho(s) = \int_a^s \mu(\sigma) d\sigma$ ,  $s \in [a, b]$ , запишем угловой потенциал в виде потенциала двойного слоя:

$$v[\mu](x) = - \int_{\Gamma} [\rho(\sigma) - \rho(b)] \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} u(j, x, y(\sigma)) d\sigma = v_1[\mu](x) + v_0[\mu](x),$$

$$v_1[\mu](x) = - \frac{i}{4} \int_{\Gamma} [\rho(\sigma) - \rho(b)] \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} H_0^{(1)}(k|x - y(\sigma)|) d\sigma,$$

$$v_0[\mu](x) = - \int_{\Gamma} [\rho(\sigma) - \rho(b)] \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} u_0(j, x, y(\sigma)) d\sigma.$$

Из приведенных представлений и лемм 1, 2 вытекает

**Т е о р е м а 1.** Пусть  $\bar{\mathcal{D}}$  — ограниченное множество,  $\Gamma$  — простая гладкая замкнутая либо разомкнутая кривая,  $\Gamma \subset \mathcal{D}$ ,  $\mu(\sigma) \in L_1(\Gamma)$ , тогда потенциалы (10), (11), (12) удовлетворяют в классическом смысле уравнению (6) в  $\bar{\Omega} \setminus \Gamma$ , граничным условиям (7), (8) и условиям (9) при  $|x_1| \rightarrow \infty$ . Кроме того, вторые слагаемые в потенциалах принадлежат  $C^\infty(\bar{\Omega})$  по  $x$ , удовлетворяют уравнению (6) и условиям (9) при  $|x_1| \rightarrow \infty$ .

Поскольку вторые слагаемые в потенциалах (10)–(12) принадлежат  $C^\infty(\bar{\Omega})$ , то поведение этих потенциалов определяется первыми слагаемыми, которые хорошо изучены. Действительно, первые слагаемые в (10)–(12) представляют собой потенциал простого слоя [2, 3], потенциал двойного слоя [2] и угловой потенциал [3] для уравнения Гельмгольца на плоскости.

## 2. Задача о трещинах в волноводе

В полосе  $\Omega$  рассмотрим разомкнутый контур  $\Gamma$ , представляющий собой совокупность простых разомкнутых кривых  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N \in C^{2,\lambda}$ ,  $\lambda \in (0, 1]$ , не имеющих общих точек, в том числе и концов [4]. Предположим, что расстояние между точками  $\Gamma$  и точками стенок полосы ( $x_2 = 0$ ,  $x_2 = l$ ) не меньше  $d > 0$ , т. е.  $\Gamma$  принадлежит некоторому множеству  $\mathcal{D}$ . Пусть контур  $\Gamma$  параметризован и в качестве параметра выступает длина дуги  $s$ :  $\Gamma_n = \{x : x = x(s), s \in [a_n, b_n]\}$ ,  $n = 1, \dots, N$ . Параметризацию выберем так, чтобы для различных  $n$  отрезки  $[a_n, b_n]$  на оси  $Os$  не имели общих точек, в том числе концов.

Предположим, что полоса разрезана вдоль  $\Gamma$ . Левый берег разреза обозначим  $\Gamma^+$ , а правый —  $\Gamma^-$ .

Будем говорить, что функция  $g(x)$  принадлежит классу  $\mathbf{K}$ , если:

- 1)  $g(x) \in C^2(\Omega \setminus \Gamma) \cap C^0(\bar{\Omega} \setminus \Gamma)$ , и  $g(x)$  непрерывна на концах  $\Gamma$ ;
- 2)  $\nabla g \in C^0(\bar{\Omega} \setminus \Gamma \setminus X)$ , где  $X$  — множество концов контура  $\Gamma$ , т. е.  $X = \bigcup_{n=1}^N \{x(a_n), x(b_n)\}$ ;
- 3) на концах контура  $\Gamma$ , т. е. при  $x \rightarrow x^0 \in X$ , выполнена оценка

$$|\nabla g| < A|x - x^0|^\epsilon,$$

где константа  $A > 0$  и  $\epsilon > -1$ .

Через  $C^0(\bar{\Omega} \setminus \Gamma)$  обозначен класс функций, которые непрерывно продолжимы на разрезы  $\Gamma$  слева и справа, но их значения на  $\Gamma$  могут быть различны, т. е. эти функции могут иметь на  $\Gamma$  разрыв первого рода (скачок).

Рассмотрим краевую задачу о трещинах в диссипативном волноводе.

**З а д а ч а Т.** Найти функцию  $g(x)$  из класса  $\mathbf{K}$ , удовлетворяющую: 1) уравнению (6) в области  $\Omega \setminus \Gamma$ , 2) одному из граничных условий (7) или (8) на боковых стенках полосы  $\Omega$ , 3) граничным условиям на  $\Gamma$

$$g|_{x(s) \in \Gamma^+} - g|_{x(s) \in \Gamma^-} = f_1(s) \in C^{1,\lambda}(\Gamma), \quad (14a)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x(s) \in \Gamma^+} - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x(s) \in \Gamma^-} = f_2(s) \in C^{0,\lambda}(\Gamma), \quad (14b)$$

где  $f_1(a_n) = f_1(b_n) = 0$ , для  $n = 1, \dots, N$ , коэффициент Гельдера  $\lambda \in (0, 1]$ , и  $\mathbf{n}$  — нормаль на  $\Gamma$ , направление которой после поворота на угол  $\pi/2$  против часовой стрелки совпадает с направлением возрастания параметра  $s$ . Кроме того, в полосе  $\Omega$  функции  $g(x)$ ,  $g_{x_1}(x)$  должны равномерно по  $x_2$  стремиться к нулю при  $|x_1| \rightarrow \infty$ .

Все условия задачи **Т** понимаются в классическом смысле. Условия на концах  $\Gamma$  в определении класса  $\mathbf{K}$  обеспечивают отсутствие точечных источников на этих концах. В свою очередь условия на бесконечности в постановке задачи **Т** гарантируют отсутствие точечных источников на бесконечности. Разрезы  $\Gamma$  моделируют трещины в волноводе.

Отметим, что коэффициент Гельдера  $\lambda$  для контура  $\Gamma$  и для функций из граничного условия один и тот же. Если эти коэффициенты различны, то в качестве  $\lambda$  всегда можно выбрать наименьший.

С помощью метода энергетических тождеств для уравнения (6) нетрудно показать, что задача **Т** имеет не более одного решения. Действительно, пусть  $g_0(x)$  — решение однородной задачи **Т**. Покажем, что  $g_0(x) \equiv 0$ . Рассмотрим прямоугольник  $M_B = \{x: x \in \Omega, |x_1| < B, x_2 \in (0, l)\}$ , содержащий  $\Gamma$ , и внешнюю нормаль к  $\partial M_B$  обозначим через  $\mathbf{n}$ . Запишем формулу Грина для уравнения (6) в  $M_B \setminus \Gamma$ :

$$\begin{aligned} & \|\nabla g_0\|_{L_2(M_B \setminus \Gamma)}^2 - k^2 \|g_0\|_{L_2(M_B \setminus \Gamma)}^2 = \\ & = \int_{\partial M_B} \bar{g}_0 \frac{\partial g_0}{\partial \mathbf{n}} dl + \int_{\Gamma} \left[ \bar{g}_0^+ \left( \frac{\partial g_0}{\partial \mathbf{n}} \right)^+ - \bar{g}_0^- \left( \frac{\partial g_0}{\partial \mathbf{n}} \right)^- \right] ds, \end{aligned} \quad (15)$$

где индексами «+» и «-» обозначаются предельные значения функций на  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$  соответственно. Через  $\bar{g}_0(x)$  обозначена функция, комплексно сопряженная с  $g_0(x)$ . Очевидно, что  $\bar{g}_0(x)$ , как и  $g_0(x)$ , удовлетворяет нулевым граничным условиям задачи **Т** и принадлежит классу  $\mathbf{K}$ . При выводе тождества (15) учтена непрерывная продолжимость функций  $g_0(x)$ ,  $\bar{g}_0(x)$ ,  $\nabla g_0(x)$ ,  $\nabla \bar{g}_0(x)$  на разрезы  $\Gamma$  слева и справа, а также учтены оценки для  $\nabla g_0(x)$  и  $\nabla \bar{g}_0(x)$  на концах  $\Gamma$ , гарантированные классом гладкости  $\mathbf{K}$ . Полагая в (15)  $B \rightarrow \infty$ , учитывая условия на бесконечности из задачи **Т** и нулевые условия на боковых стенках полосы  $\Omega$ , получим, что первый интеграл в правой

части формулы стремится к нулю и формуле можно придать вид

$$\begin{aligned} & \|\nabla g_0\|_{L_2(\Omega \setminus \Gamma)}^2 - k^2 \|g_0\|_{L_2(\Omega \setminus \Gamma)}^2 = \\ & = \int_{\Gamma} \left\{ [\bar{g}_0^+(x) - \bar{g}_0^-(x)] \left( \frac{\partial g_0(x)}{\partial \mathbf{n}} \right)^+ + \right. \\ & \left. + \bar{g}_0^-(x) \left[ \left( \frac{\partial g_0(x)}{\partial \mathbf{n}} \right)^+ - \left( \frac{\partial g_0(x)}{\partial \mathbf{n}} \right)^- \right] \right\} ds. \end{aligned} \quad (16)$$

Из нулевых граничных условий (14), которые справедливы для  $g_0$  и  $\bar{g}_0$ , вытекает, что интеграл в правой части (16) равен нулю, т. е.

$$\|\nabla g_0\|_{L_2(\Omega \setminus \Gamma)}^2 - k^2 \|g_0\|_{L_2(\Omega \setminus \Gamma)}^2 = 0. \quad (17)$$

Напомним, что  $k = k_1 + i k_2$  и  $k_2 > 0$ . Если  $k_1 = 0$ , то из (17) следует  $\|g_0\|_{L_2(\Omega \setminus \Gamma)}^2 = 0$ . Если  $k_1 \neq 0$ , то беря в (17) мнимую часть, найдем, как и выше, что  $\|g_0\|_{L_2(\Omega \setminus \Gamma)}^2 = 0$ . Таким образом,  $g_0(x) \equiv 0$ , а значит, однородная задача **Т** имеет только тривиальное решение. В силу линейности неоднородная задача **Т** имеет не более одного решения.

Непосредственной проверкой с использованием теоремы 1 и результатов из [3] несложно убедиться в том, что решение задачи **Т** дается формулой

$$g(x) = v[f'_1](x) + w_1[f_2](x), \quad (18)$$

где  $v[f'_1](x)$  — угловой потенциал (12) с плотностью  $f'_1(s)$ ,  $w_1[f_2](x)$  — потенциал простого слоя (10) с плотностью  $f_2(s)$ , причем в (10), (12) под интегралом по  $\Gamma$  понимается сумма интегралов по  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ . На каждой кривой  $\Gamma_n$  ядро углового потенциала определяется формулой (13), в которой  $a = a_n$ ,  $b = b_n$ .

Из результатов [3] и теоремы 1 вытекает, что функция (18) принадлежит классу  $\mathbf{K}$ . В частности, неравенство из п. (3) в определении класса  $\mathbf{K}$  справедливо при любом  $\epsilon \in (-1, 0)$ .

При построении решения задачи **Т** мы учли то, что нормальная производная углового потенциала  $v[f'_1](x)$  непрерывна на  $\Gamma$ , а также то, что потенциал простого слоя  $w_1[f_2](x)$  и его касательная производная непрерывны на  $\Gamma$ . Эти свойства потенциалов непосредственно вытекают из результатов работы [3] и теоремы 1. Отметим, что потенциалы (10), (12) удовлетворяют условию (7), когда  $j = 1$ , и условию (8), когда  $j = 2$ . Очевидно, функция (18), дающая решение задачи **Т**, удовлетворяет условиям (7), (8) в тех же случаях.

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

**Т е о р е м а 2.** Решение задачи **Т** существует, единственно и дается формулой (18).

Отметим, что формула (18) дает явное решение задачи **T** для трещин  $\Gamma$  произвольной формы.

Краевые задачи в случае прямолинейного отрезка  $\Gamma$  с классическим условием Дирихле либо Неймана изучались в работах [5, 6]. Численные подходы к классическим задачам о трещинах обсуждаются в работе [7].

**Литература**

1. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М., 1984.
2. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.

3. Крутицкий П.А. // ЖВМ и МФ. 1994. 34, №8–9. С. 1237.
4. Мухомеливили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
5. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М., 1974.
6. Шестопалов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А. Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции. Киев, 1984.
7. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев, 1981.

Поступила в редакцию  
25.06.97

УДК 517.54

## РАСЧЕТ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПОЛЕЙ ХОЛЛА В ЗАМАГНИЧЕННЫХ ПРОВОДЯЩИХ ПЛАСТИНКАХ МЕТОДОМ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

**В. И. Иванов**

(кафедра математики)

**Задача о распределении электрического тока в замагниченной пластинке с двумя протяженными электродами на границе решается методом конформного отображения на параллелограмм. Рассмотрены случаи вырождения одного или обоих электродов в точку. Построены картины линий тока и эквипотенциалей электрического поля в прямоугольных и круглых пластинках.**

1. Пусть плоская односвязная область  $G$  представляет однородную изотропную электропроводящую пластинку, помещенную в однородное магнитное поле  $H$ , перпендикулярное плоскости пластинки. Пусть участки  $L_1$  и  $L_2$  границы области  $G$  представляют электроды, на которых заданы значения потенциала электрического поля:

$$U|_{L_1} = 0, \quad U|_{L_2} = U_0.$$

Участки границы  $C_1$  и  $C_2$  предполагаются электрически изолированными (рис. 1,а). Рассматривается задача о распределении электрического тока  $\mathbf{J}$  и электрического поля  $\mathbf{E} = \nabla U$  в области  $G$ .

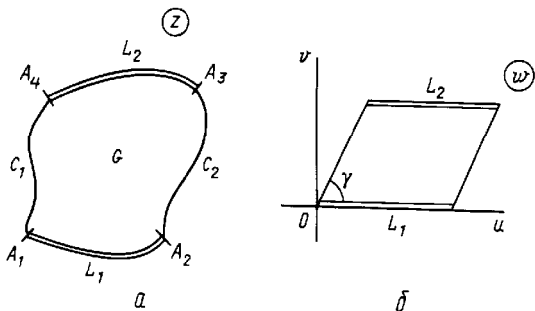


Рис. 1. Пластинка с двумя протяженными электродами  $L_1$  и  $L_2$  (а) и ее отображение (б)

Распределение электрического тока в замагниченной пластинке определяется законом [1,2]

$$\mathbf{J} = \rho^{-1}(\mathbf{E} + R[\mathbf{J} \times \mathbf{H}]), \tag{1}$$

где  $\rho$  — удельное электрическое сопротивление,  $R$  — константа Холла. Иначе зависимость между  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{J}$  можно представить в матричной форме:

$$\mathbf{E} = \rho \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \mathbf{J},$$

где  $\beta = RH/\rho$ . Полагая  $\beta = \operatorname{tg} \alpha$ , представим зависимость между  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{J}$  в виде

$$\mathbf{E} = \rho \sec \alpha \hat{P} \mathbf{J}, \tag{2}$$

где

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

— оператор поворота на угол  $\alpha$ . Таким образом, в замагниченной пластинке векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{J}$  в каждой точке составляют постоянный угол  $\alpha$ , называемый углом Холла.

Векторные поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{J}$  суть гармонические, причем линии тока пересекают эквипотенциалы электрического поля под постоянным углом  $\gamma = \pi/2 - \alpha$ .