

Отметим, что формула (18) дает явное решение задачи **T** для трещин Γ произвольной формы.

Краевые задачи в случае прямолинейного отрезка Γ с классическим условием Дирихле либо Неймана изучались в работах [5, 6]. Численные подходы к классическим задачам о трещинах обсуждаются в работе [7].

Литература

1. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М., 1984.
2. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.

3. Крутицкий П.А. // ЖВМ и МФ. 1994. 34, №8–9. С. 1237.
4. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
5. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М., 1974.
6. Шестопалов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А. Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции. Киев, 1984.
7. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев, 1981.

Поступила в редакцию
25.06.97

УДК 517.54

РАСЧЕТ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПОЛЕЙ ХОЛЛА В ЗАМАГНИЧЕННЫХ ПРОВОДЯЩИХ ПЛАСТИНКАХ МЕТОДОМ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

В. И. Иванов

(кафедра математики)

Задача о распределении электрического тока в замагниченной пластинке с двумя протяженными электродами на границе решается методом конформного отображения на параллелограмм. Рассмотрены случаи вырождения одного или обоих электродов в точку. Построены картины линий тока и эквипотенциалей электрического поля в прямоугольных и круглых пластинках.

1. Пусть плоская односвязная область G представляет однородную изотропную электропроводящую пластинку, помещенную в однородное магнитное поле H , перпендикулярное плоскости пластинки. Пусть участки L_1 и L_2 границы области G представляют электроды, на которых заданы значения потенциала электрического поля:

$$U|_{L_1} = 0, \quad U|_{L_2} = U_0.$$

Участки границы C_1 и C_2 предполагаются электрически изолированными (рис. 1,а). Рассматривается задача о распределении электрического тока \mathbf{J} и электрического поля $\mathbf{E} = \nabla U$ в области G .

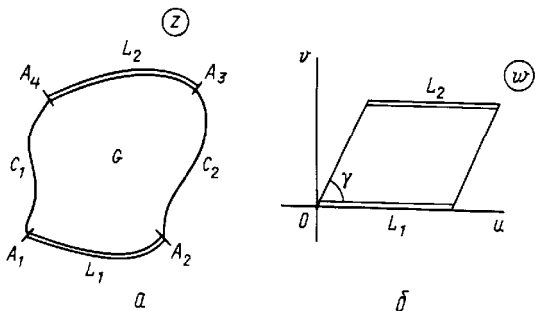


Рис. 1. Пластинка с двумя протяженными электродами L_1 и L_2 (а) и ее отображение (б)

Распределение электрического тока в замагниченной пластинке определяется законом [1,2]

$$\mathbf{J} = \rho^{-1}(\mathbf{E} + R[\mathbf{J} \times \mathbf{H}]), \tag{1}$$

где ρ — удельное электрическое сопротивление, R — константа Холла. Иначе зависимость между \mathbf{E} и \mathbf{J} можно представить в матричной форме:

$$\mathbf{E} = \rho \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \mathbf{J},$$

где $\beta = RH/\rho$. Полагая $\beta = \text{tg } \alpha$, представим зависимость между \mathbf{E} и \mathbf{J} в виде

$$\mathbf{E} = \rho \sec \alpha \hat{P} \mathbf{J}, \tag{2}$$

где

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

— оператор поворота на угол α . Таким образом, в замагниченной пластинке векторы \mathbf{E} и \mathbf{J} в каждой точке составляют постоянный угол α , называемый углом Холла.

Векторные поля \mathbf{E} и \mathbf{J} суть гармонические, причем линии тока пересекают эквипотенциалы электрического поля под постоянным углом $\gamma = \pi/2 - \alpha$.

Условие $J_n = 0$ на изолированных участках границы C_1 и C_2 обращается в условие $E_t = \partial U / \partial l = 0$, где $\partial / \partial l$ — наклонная производная в направлении, составляющем угол γ с направлением касательной к границе области:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial s} \cos \gamma - \frac{\partial U}{\partial n} \sin \gamma.$$

Здесь $\partial / \partial s$ и $\partial / \partial n$ обозначают производные по длине дуги s и по нормали к границе n соответственно.

Таким образом, задача определения потенциала электрического поля формулируется как смешанная краевая задача для гармонической функции U с заданными значениями на участках границы L_1 и L_2 и с нулевой наклонной производной на участках C_1 и C_2 :

$$\begin{aligned} \Delta U &= 0 \quad \text{в области } G, \\ U|_{L_1} &= 0, \quad U|_{L_2} = U_0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial l} \right|_{C_1} = \left. \frac{\partial U}{\partial l} \right|_{C_2} = 0.$$

2. Задачу (3) можно эффективно решить с помощью конформного отображения. Для этого следует отобразить область G на параллелограмм плоскости $w = u + iv$ с острым углом γ так, чтобы участок границы L_1 отобразился в нижнюю сторону параллелограмма, а участок L_2 — в его верхнюю сторону (рис. 1, б). При этом эквипотенциали электрического поля отобразятся в горизонтальные прямые $v = \text{const}$, а линии тока — в наклонные прямые

$$-u \sin \gamma + v \cos \gamma = \text{Im}(w e^{-i\gamma}) = \text{const}.$$

Пусть область G отображается на полуплоскость $\text{Im } t > 0$ с помощью функции $t = f(z)$ и при этом точки A_1, A_2, A_3, A_4 отображаются соответственно в точки вещественной оси a_1, a_2, a_3, a_4 , причем $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Отображение полуплоскости на параллелограмм (рис. 1, б) осуществляется интегралом Кристоффеля–Шварца

$$w = C \int_0^t (t - a_1)^{k-1} (a_2 - t)^{-k} (a_3 - t)^{k-1} (a_4 - t)^{-k} dt, \quad (4)$$

где $k = \gamma / \pi$, C — масштабный множитель ($C > 0$). Эквипотенциали и линии тока в области G строятся соответственно как линии уровня функций $v = \text{Im } w$, $V = \text{Im}(w e^{-i\gamma})$.

3. В общем случае задача отображения заданной области на параллелограмм решается только численно. Для некоторых областей простой формы в случае вырождения одного или обоих электродов в точку задача может быть решена аналитически.

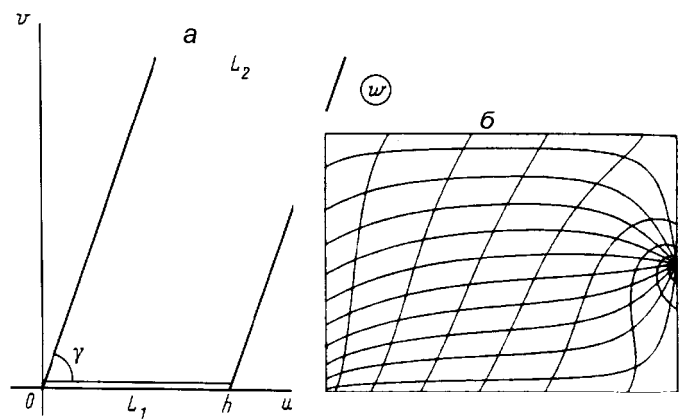


Рис. 2. Отображение пластинки с одним точечным и одним протяженным электродом (а) и линии тока и эквипотенциали в прямоугольной пластинке с одним точечным и одним протяженным электродами при $\alpha = 30^\circ$ (б)

Пусть один электрод (L_2) представляет собой точку, а электрод L_1 является протяженным. В этом случае следует конформно отобразить область G на скошенную полубесконечную полосу с острым углом γ так, чтобы точка L_2 отобразилась в бесконечно удаленную точку, а протяженный электрод L_1 — в отрезок вещественной оси (рис. 2, а). Предварительно область G отображается на полуплоскость $\text{Im } t > 0$ так, чтобы протяженный электрод L_1 отобразился в отрезок $(0, 1)$, а точка L_2 — в бесконечность. Нужное отображение полуплоскости на скошенную полуполосу (рис. 2, а) осуществляется функцией

$$w = C \int_0^t t^{k-1} (1-t)^{-k} dt, \quad (5)$$

где $k = \gamma / \pi$, $C = h/B(k, 1-k) = h/\pi \sin \gamma$.

Интеграл в формуле (5) выражается через гипергеометрическую функцию [3]:

$$\int_0^t t^{k-1} (1-t)^{-k} dt = (t^k/k) F(k, k; k+1; t).$$

Последняя вычисляется в круге $|t| < 1$ как сумма гипергеометрического ряда, а вне круга — по формулам его аналитического продолжения.

Пример компьютерной визуализации сети эквипотенциалей и линий тока в прямоугольной пластинке приведен на рис. 2, б. Здесь предполагается, что один электрод (протяженный) представляет собой сторону прямоугольника, а другой электрод — точку, помещенную в середине противоположной стороны. Угол Холла предполагается равным 30° . Эквипотенциали и линии тока построены соответственно как изолинии функций $v = \text{Im } w$, $V = \text{Im}(w e^{-i\gamma})$.

4. Если оба электрода представляют собой точки на границе пластинки, то задача о распределении полей Холла решается с помощью конформного отображения области G на бесконечную полосу. Следует отобразить область G на полосу так, чтобы электроды отобразились в бесконечно удаленные граничные точки полосы. При этом линии тока отображаются в бесконечные прямые, а эквипотенциалы — в их изогональные траектории (отрезки наклонных прямых).

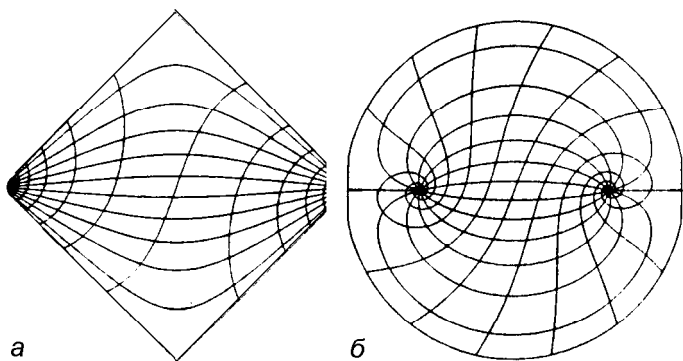


Рис. 3. Линии тока и эквипотенциалы в замагниченных пластинках при $\alpha = 20^\circ$: точечные электроды на границе пластинки (а) и внутри пластинки (б)

Пример визуализации полей Холла в квадратной пластинке с электродами, помещенными в противоположных вершинах квадрата, представлен на рис. 3,а. Угол Холла полагается равным 20° .

5. Задача о распределении полей Холла решается с помощью конформного отображения и в тех случаях, когда один или оба точечных электрода помещены внутри области G . В этих случаях следует

отобразить область G на бесконечную плоскость с прямолинейным разрезом так, чтобы один электрод отображился в начало координат, другой — в бесконечно удаленную точку, а граница области — в разрез вдоль отрезка вещественной оси. При этом линии тока отображаются в лучи, выходящие из начала координат, а эквипотенциалы — в их изогональные траектории, т.е. логарифмические спирали. Пример такого отображения (при значении $\alpha = 20^\circ$) приведен на рис. 3,б. Здесь изображена сеть эквипотенциалей и линий тока в круглой пластинке в случае, когда точечные электроды расположены в симметричных точках внутри пластинки.

Рисунки 2,б и 3 построены с помощью компьютерной программы CONFORM, прилагаемой к книге [4]. При построении рис. 2,б и 3,а использовались эллиптические функции комплексного аргумента, вычисляемые программой CONFORM.

Автор выражает благодарность А.Э. Юновичу и В.В. Остробородовой за ценные консультации.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М., 1992.
2. Бонч-Бруевич В.Л., Калашиников С.Г. Физика полупроводников. М., 1990.
3. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М., 1979.
4. Ivanov V.I., Trubetskoy M.K. Handbook of Conformal Mapping with Computer-Aided Visualization. Boca Raton: CRC Press, 1995.

Поступила в редакцию
09.07.97