ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.12:531.51

ФИНСЛЕРОВА g-КОРРЕКТИРОВКА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ

Г. С. Асанов

(*кафедра теоретической физики*)

Предложен метод вычисления финслеровых поправок к основным динамическим соотношениям, сопровождающим переходы между лабораторной системой отсчета, системой центра масс и системой отсчета мишени.

Введение

Расчеты процессов взаимодействия частиц включают использование различных динамических соотношений, как это описано довольно систематическим образом, например, в [1]. Обобщение первичной геометрии пространства-времени с риманова случая на финслеров ведет неизбежно к появлению поправок к динамическим соотношениям. В предположении, что финслерово обобщение включает единственный характерный параметр g (как в случае специально-релятивистской финслеровой метрической функции, введенной в работах [2, 3]), учет финслерова обобщения динамических соотношений может быть условно назван g-корректировкой динамических соотношений. Соответствующие финслеровы определения могут быть введены вполне определенным образом и на основе вполне общих рассмотрений.

Мы назовем динамическое соотношение универсальным, если оно имеет фиксированный вид независимо от того, вводится ли финслерово обобщение или нет. Прежде всего, сам вид

$$P_R + Q_R + \ldots = \textit{сохраняющаяся величина}$$

закона сохранения четырехмерного импульса является универсальным (в этот закон вообще не входит никакой метрический тензор). Другой важный пример возникает после использования дисперсионных соотношений (2) для определения функции $P_0 = P_0(P_a)$ и применения производной $\partial/\partial P_a$ к тождеству $H^2\left(P_0(P_a), P_a\right) = m_1^2$. Используя финслерово правило

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial H^2(y_R)}{\partial y_Q} = y^Q = a^{PQ}(y_R)y_P$$

(см. [4, 5]), мы немедленно получим закон

$$\frac{\partial P_0}{\partial P_a} = -\frac{P^a}{P^0}$$

универсального типа. В то же время правая сторона не может быть записана как P_a/P_0, ибо римановы равенства $P_0 = P^0$ и $P_a = -P^a$ нарушаются после финслерова обобщения. Формулировка финслеровой динамики обнаруживает различные универсальные динамические соотношения.

1. Общие наблюдения

Через L_0 обозначим земную лабораторию. Следуя обычной практике, будем считать L_0 инерциальной системой отсчета и представлять геометрические величины их компонентами относительно собственной системы координат S_0 системы отсчета L_0. Соответствующие индексы $P, Q, \ldots$ будут пробегать значения 0,1,2,3, а индексы $a, b, \ldots$ — значения 1,2,3.

Предположим, что первичная геометрия пространства-времени представляется финслеровым метрическим тензором a, и обозначим через $a^{PQ}(R_S)$ компоненты тензора относительно S_0, где R_S — компоненты ковариантного четырехмерного вектора. Ассоциируемая функция Гамильтона имеет вид

$$H(R) = [a^{PQ}(R)R_P R_Q]^{1/2}, \tag{1}$$

так что для двух заданных четырехмерных импульсов P_R и Q_R, относящихся к частицам с массами покоя m_1 и m_2, соответствующие финслеровы дисперсионные соотношения имеют вид

$$H(P) = m_1, \quad H(Q) = m_2. \tag{2}$$

Очевидно, $H(P_R + Q_R)$ и $H(P_R - Q_R)$ играют роль финслеровой инвариантной массы системы двух частиц и финслеровой инвариантной массы переданного импульса двух соударяющихся частиц. Следовательно, определения

$$s_{12} = H^2(P_R + Q_R) \tag{3}$$

и

$$t_{12} = H^2(P_R - Q_R) \tag{4}$$

вводят величины s_{12} и t_{12}, которые являются не чем иным, как прямыми финслеровыми обобщениями своих обычных классических динамических прототипов (см., напр., [1, гл. 2, п. 2]). Наконец, будем использовать финслерово скалярное произведение (PQ) импульсов P_R и Q_R, которое должно быть симметричным:

$$(PQ) = (QP) \tag{5}$$

из-за равноправности векторов.

Пусть $L^*(R)$ — инерциальная система отсчета, движущаяся в направлении вектора R_P, а $H_Q^{(P)}(R)$ — тетрады, представляющие собственную систему координат системы отсчета $L^*(R)$, так что

$$\begin{gathered} a_{PQ}(R) = \sum_{T=0}^{3} q_T H_P^{(T)}(R) H_Q^{(T)}(R), \\ q_T = (1, -1, -1, -1), \end{gathered} \tag{6}$$

$$H_P^{(0)}(R) = R_P / H(R), \tag{7}$$

$$H_P^{(Q)}(R)|_{R_a=0} = \delta_P^Q, \tag{8}$$

$$H_P^{(Q)}(kR) = H_P^{(Q)}(R), \quad k > 0. \tag{9}$$

Здесь $a_{PQ}(R)$ — ковариантные компоненты финслерова метрического тензора a, так что $a_{PQ}a^{QT} = \delta_P^T$, а δ — символ Кронекера. Представление (6) показывает, что тетрады являются ортонормированными, а равенство (7) — что $H_P^{(Q)}$ является единичным вектором:

$$H(H_P^{(Q)}) = 1. \tag{10}$$

Вследствие (8) никакие собственно пространственные вращения не допускаются в ассоциируемых кинематических преобразованиях

$$P_P = H_P^{(Q)}(R) P_Q^*, \quad Q_P = H_P^{(Q)}(R) Q_Q^* \tag{11}$$

из L_0 в $L^*(R)$. Условие (9) согласуется с однородностью

$$a_{PQ}(kR) = a_{PQ}(R), \quad k > 0, \tag{12}$$

которая накладывается на метрический тензор в финслеровой геометрии (ср. [4, 5]). Обозначение $H_{(Q)}^P(R)$ будет использоваться для контравариантной тетрады, взаимной к ковариантной тетраде $H_P^{(Q)}(R)$, так что

$$H_S^{(Q)}(R) H_{(Q)}^T(R) = \delta_S^T. \tag{13}$$

В частности,

$$H_{(P)}^R(Q) Q_R = m_2 \delta_P^0 \tag{14}$$

(если использовать (7) и (13) при $R_P = Q_P$ и применить (2)).

Если на таких же основаниях рассмотрим другую инерциальную систему отсчета $L'(T)$, движущуюся в направлении четырехмерного ковариантного вектора T_R, то получим

$$P_P = H_P^{(Q)}(T) P'_Q, \quad Q_P = H_P^{(Q)}(T) Q'_Q, \tag{15}$$

откуда вытекает, что закон преобразования из L' в L^* имеет вид

$$P_P^* = N_P{}^Q(R,T) P'_Q, \quad Q_P^* = N_P{}^Q(R,T) Q'_Q, \tag{16}$$

$$N_P{}^Q(R,T) = H_{(P)}^S(R) H_S^{(Q)}(T). \tag{17}$$

Преобразованные выражения $H^*(P^*)$ и $H'(P')$ функции Гамильтона $H(P)$ из L_0 в L^* и в L' получаются прямо после использования соответственно (11) и (13):

$$H^*(P^*) = H(P), \quad H'(P') = H(P). \tag{18}$$

2. Начальные утверждения

Используем обозначение $L^{CM}(P,Q)$ для системы отсчета центра масс импульсов P_R и Q_R и введем обычное

Определение. *Система отсчета* $L^*(R)$ *является системой* $L^{CM}(P,Q)$, *если*

$$P_a^* + Q_a^* = 0. \tag{19}$$

Если теперь положить

$$R_P = P_P + Q_P \tag{20}$$

и использовать (11) вместе с (19), то получится соотношение

$$R_P = H_P^{(0)}(R)(P_0^* + Q_0^*), \tag{21}$$

которое указывает, ввиду (7), что вектор $H_P^{(0)}(R)$ параллелен вектору $P_P + Q_P$. Мы находим также, что

$$H(P_R + Q_R) = P_0^* + Q_0^* \tag{22}$$

как следствие (21), (9) и (10). В правой части (22) компоненты P_0^* и Q_0^* определяются из системы отсчета $L^{CM}(P,Q)$.

Итак, мы доказали следующее

Предложение 1. *При общих условиях, выдвинутых в разделе* 1, *и независимо от конкретного вида финслеровой функции Гамильтона* (1), *система отсчета* $L^{CM}(P,Q)$ *движется в направлении вектора* R_P, *задаваемого формулой* (20), *и выполняется равенство* (22).

Ниже под L' будет пониматься система отсчета $L'(Q)$ импульса Q_R и формулы (15)–(17) будут применяться при $T_R = Q_R$. Если рассматривается процесс соударения двух частиц с импульсами P_R и Q_R, то L' играет роль системы отсчета мишени, идентифицируемой со второй частицей, или символически

$$L' \equiv L^{\text{target}}(Q). \tag{23}$$

Одновременно мы будем обозначать систему центра масс просто через L^*, или символически

$$L^* \equiv L^{CM}(P,Q). \tag{24}$$

Вектор R_P будет обозначать импульс центра масс (20).

Вследствие (22) инвариантная масса $\sqrt{s_{12}}$, определяемая согласно (3), может быть задана формулой

$$\sqrt{s_{12}} = P_0^* + Q_0^* = R_0^*. \tag{25}$$

Кроме того, финслерово обобщение не модифицирует общее определение

$$V_a^{CM} \stackrel{\text{def}}{=} R_a/R_0 \tag{26}$$

скорости движения системы отсчета L^* относительно L_0 и не видоизменяет ни ассоциируемый γ-фактор

$$\gamma^{CM} \stackrel{\text{def}}{=} R_0 \,/ \sqrt{s_{12}}\ , \tag{27}$$

ни произведение

$$\gamma^{CM} V_a^{CM} = R_a \,/ \sqrt{s_{12}} \tag{28}$$

(ср. обычные динамические прототипы (5.3)–(5.5) в работе [1, гл. 2]). Таким образом, мы видим, что представления (25)–(28) имеют универсальный вид. Однако вид зависимости функции s_{12} от P_a и Q_a, функции γ^{CM} от V_a^{CM} (или от P_a и Q_a) и т. д. далеко не инвариантен и, следовательно, должен быть подвергнут g-корректировке систематическим образом.

Рассмотрим теперь скорость

$$V_a \stackrel{\text{def}}{=} R'_a/R'_0 \tag{29}$$

системы отсчета L^* при наблюдении из L'. Применяя правило (15) к R_P и принимая во внимание (20) и (32), получаем соотношение

$$R'_P = m_2\delta_P^0 + P'_p, \tag{30}$$

которое влечет за собой равенство

$$V_a = P'_a/(m_2 + P'_0). \tag{31}$$

Сравнивая (25) с (31), можно заключить, что справедливо соотношение

$$\sqrt{s_{12}} = (m_2 + P'_0)H'(1, V_a) \tag{32}$$

по представлениям системы отсчета L'. Поскольку представление (25) имеет инвариантный вид, представление (32) отличается от своего классического динамического прототипа множителем $H'(1,V_a)$, который отличен от единицы в финслеровом случае.

В качестве первого шага для конкретизации функции Гамильтона (1) целесообразно предположить, что функция пространственно симметрична, т. е. представима в виде

$$H(P_R) = R_0 W(r), \tag{33}$$

где

$$r = \sqrt{\delta^{ab} R_a R_b}\Big/ R_0. \tag{34}$$

Функция $W(r)$ играет роль обобщения классической $W_{\text{cl}}(r) = \sqrt{1-r^2}$ и может быть названа генерирующей функцией. Предположение (33)–(34) означает, что зависимость от R_a должна входить в финслерову функцию Гамильтона только через пространственно-инвариантный модуль $\sqrt{\delta^{ab}R_aR_b}$. В таком случае очевидно, что трехмерные ковариантные скорости

$$V_a^{(1)} = P_a/P_0, \quad V_a^{(2)} = Q_a/Q_0$$

входят в определения (3) и (4) симметричным образом, откуда прямо следует, что экстремум функций (3) и (4) достигается при $V_a^{(1)} = V_a^{(2)}$ (удобно также продифференцировать (3) и (4) по P_a и применить закон (2)). Следовательно, справедливо следующее

Предложение 2. *Коль скоро пространственная изотропность сохраняется, классические неравенства*

$$s_{12} \geqslant (m_1 + m_2)^2, \quad t_{12} \leqslant (m_1 - m_2)^2$$

остаются справедливыми независимо от конкретного типа финслерова обобщения, применяемого к динамике частиц.

Литература

1. *Бюклинг Е., Каянти К.* Кинематика элементарных частиц. М., 1975.
2. *Асанов Г.С.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1994. № 1. С. 19 (Moscow University Phys. Bull. 1994. No. 1. P. 18).
3. *Асанов Г.С.* // Там же. 1996. № 1. С. 18 (Ibid. 1996. No. 1. P. 15).
4. *Рунд Х.* Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М., 1981.
5. *Asanov G.S.* Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories. Dordrecht, 1985.

Поступила в редакцию
08.01.97