УДК 539.12.164

# РОЖДЕНИЕ АТОМОВ ПОЗИТРОНИЯ В РАСПАДАХ ЛЕГКИХ МЕЗОНОВ

**А. П. Мартыненко*), Р. Н. Фаустов**

(*кафедра квантовой статистики и теории поля*)

**В рамках квазипотенциального метода описания связанных состояний исследована вероятность образования ортопозитрония в распаде $\pi^0$-мезона. Вычислены релятивистские и радиационные поправки порядка $O(\alpha)$ к ширине распада и проведено сравнение с экспериментальными данными.**

## Введение

Реакции взаимодействия и распада пионов служат ценным источником информации не только о свойствах пионов, но и об общих закономерностях взаимодействия элементарных частиц. Так, измерение отношения вероятностей распадов $\pi^+ \to e^+ + \nu_e$ и $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ было использовано для проверки предположения о векторно-аксиальной структуре гамильтониана слабого взаимодействия, а открытие бета-распада пиона $\pi^+ \to \pi^0 + e^+ + \nu_e$ явилось экспериментальным подтверждением гипотезы о сохранении векторного тока в слабом взаимодействии [1]. Одно из первых указаний на существование цветовых степеней свободы кварков было получено при изучении распада $\pi^0 \to \gamma + \gamma$. В работе [2] была отмечена важность изучения редких распадов псевдоскалярных мезонов

$$\pi^0 \to \gamma + Ps, \quad \eta^0 \to \gamma + Ps$$

(здесь символ $Ps$ обозначает связанное состояние электрона и позитрона), которые являются источником пучков релятивистских позитрониев. Приближенная оценка сечения рождения позитрония, данная в [2] с помощью нерелятивистской волновой функции, впоследствии уточнялась в работе [3], где для описания релятивистских эффектов использована релятивистская волновая функция Барбиери–Ремидди [4], и в работе [5], в которой изучен ряд поправок порядка $O(\alpha)$ к основной амплитуде распада, обусловленных поляризацией вакуума и однофотонным обменом в электрон-позитронном связанном состоянии. Экспериментальная точность измерения вероятности распада $\pi^0 \to \gamma + Ps$

$$w_{\text{exp}}\ (\pi^0 \to \gamma + Ps) = \frac{\Gamma(\pi^0 \to \gamma + Ps)}{\Gamma(\pi^0 \to \gamma + \gamma)} = \\ = (1,82 \pm 0,29) \cdot 10^{-9} \tag{1}$$

(здесь $\Gamma$ — ширина соответствующего распада), существенно возросшая в последнее время [6], делает дальнейшие исследования рождения позитрония и мюония в распадах псевдоскалярных мезонов весьма актуальными. Для определения интенсивности пучков позитрониев [7], генерированных в изучаемых распадах на протонных кольцевых ускорителях, необходимо знание сечения развала позитрония в веществе, расчет которого был выполнен в рамках квазипотенциального подхода в [8]. Другие механизмы рождения атомов позитрония изучались в работах [9–11]. В настоящей работе исследовались релятивистские эффекты, связанные с рождением ортопозитрония в распаде $\pi^0$-мезона на основе локального квазипотенциального метода [12], использованного ранее при расчете $O(\alpha^2)$-поправок к ширине распада ортопозитрония [13]. Мы вычисляем также $O(\alpha)$-поправки к древесной амплитуде, связанные с диаграммами, в которых два виртуальных фотона, испущенные $\pi^0$-мезоном, соединяются с электрон-позитронной линией, и с нее же испускается реальный фотон.

Локальное квазипотенциальное уравнение для двухчастичной волновой функции $\psi_M(\mathbf{p})$ в с. ц. м. имеет вид [12]

$$\left(\frac{b^2}{2\mu_R} - \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_R}\right)\psi_M(\mathbf{p}) = \int V(\mathbf{p},\mathbf{q},M)\psi_M(\mathbf{q})\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}, \tag{2}$$

где $\mu_R = M/4$ — релятивистская приведенная масса, а квадрат относительного импульса частиц на энергетической поверхности выражается через массу связанного состояния $M = 2m + B$ ($B$ — энергия связи) следующим образом:

$$b^2(M) = \frac{1}{4}M^2 - m^2. \tag{3}$$

В случае ортопозитрония основной вклад в оператор взаимодействия частиц $V(\mathbf{p},\mathbf{q},M)$ дает кулоновский потенциал, для которого (2) имеет точное решение в виде волновых функций типа Паули [13].

## 2. Релятивистские поправки в распаде $\pi^0 \to \gamma + Ps$

Основной вклад в исследуемую амплитуду распада определяется древесной диаграммой рис. 1. Одна часть этой амплитуды, обусловленная сильным

*) Самарский государственный университет.

взаимодействием, вычислена нами в предположении точечного $g\gamma_5$-взаимодействия между $\pi^0$-мезоном и составляющими его $u$-, $d$-кварками с массой $m_q = 330$ МэВ [14]. В другой же части амплитуды, связанной с рождением $(e^+e^-)$-состояния, главную роль играют электромагнитные взаимодействия, последовательный учет которых и будет проведен на основе (2).

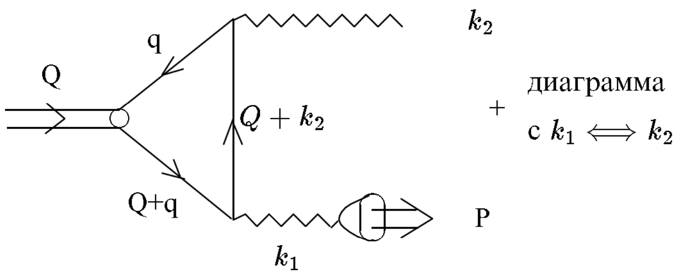


*Рис. 1.* Диаграмма Фейнмана, определяющая основной вклад в ширину распада $\pi^0 \to \gamma + Ps$

Амплитуда распада, представленного на рис. 1, имеет вид

$$M_0 = N_c \sum_{f=u,d} (\lambda_f e_f^2)(4\pi\alpha)^{3/2} F_s^0(Q^2, P^2)\varepsilon^{\alpha\beta\sigma\omega} \times \\ \times k_2^\alpha e_\gamma^\beta Q^\sigma \frac{-i}{k_1^2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[\gamma^\omega T_0(p,P)\psi_n(p,P)\right], \tag{4}$$

где $T_0(p,P)$ — часть амплитуды $M_0$, которая определяет электромагнитное взаимодействие лептонов в связанном состоянии (основной вклад в $M_0$ получится, если положить $T_0(p,P) = 1$), $N_c$ — цветовой фактор, $e_f$ — заряд кварка сорта $f$, $\lambda_u = 1$, $\lambda_d = -1$, $p$ — импульс относительного движения частиц в системе $(e^+e^-)$, $\psi_n(p,P)$ — амплитуда Бете–Солпитера, которая удовлетворяет следующему уравнению:

$$\psi_n(p,P) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} G_0(p,k,P) \times \\ \times \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} K(k,q,P)\psi_n(q,P), \tag{5}$$

где $K(k,q,P)$ — двухчастично-неприводимое ядро, а $G_0(p,k,P)$ — двухчастичная свободная функция Грина. Из (5) следует, что амплитуда $\psi_n(p,P)$ в (4) эффективно учитывает кулоновское взаимодействие между электроном и позитроном в связанном состоянии. Переходный формфактор $F_s^0(Q^2,P^2)$, который определяется кварковой петлей, может быть вычислен точно с использованием фейнмановской параметризации:

$$F_s^0(Q^2,P^2) = \int \frac{id^4q}{(2\pi)^4} \times \tag{6}$$

$$\times \frac{4m_q g}{(q^2-m_q^2+i0)[(q+k_2)^2-m_q^2+i0][(q+Q)^2-m_q^2+i0]} =$$

$$= \frac{m_q g}{4\pi^2} \int_0^1 dx \times$$

$$\times \int_0^1 \frac{(1-y)dy}{[Q^2y(1-y)(1-x) + P^2y(1-y)x - m_q^2]} =$$

$$= \frac{m_q g}{2\pi^2} \frac{1}{Q^2 - P^2} \times$$

$$\times \left[\mathrm{arctg}^2\left(\frac{\sqrt{Q^2}}{\sqrt{4m_q^2 - Q^2}}\right) - \mathrm{arctg}^2\left(\frac{\sqrt{P^2}}{\sqrt{4m_q^2 - P^2}}\right)\right].$$

Очевидно, что переходный формфактор, который возникает при расчете ширины распада $\pi^0 \to \gamma + \gamma$, может быть получен из (6) при $P^2 = 0$.

Рассмотрим теперь часть амплитуды $M_0$, которая связана с волновой функцией $\psi_n(p,P)$. Для рачета ширины распада $\pi^0$-мезона преобразуем $M_0$ таким образом, чтобы она содержала квазипотенциальную волновую функцию, имеющую хорошую физическую интерпретацию. Для этого введем вершинную функцию $\Gamma(p_1,p_2)$:

$$\psi(p,P) = \frac{\hat{p}_1 + m}{p_1^2 - m^2 + i0}\Gamma(p_1,p_2)\frac{\hat{p}_2 - m}{p_2^2 - m^2 + i0} \tag{7}$$

и разложим пропагаторы частиц на состояния с положительной и отрицательной энергией. Так, пропагатор электрона представим в виде

$$\frac{\hat{p}_1 + m}{p_1^2 - m^2 + i0} = \\ = \frac{m}{\epsilon(\mathbf{p})}\left[\frac{u^{(\alpha)}(\mathbf{p})\bar{u}^{(\alpha)}(\mathbf{p})}{p_1^0 - \epsilon(\mathbf{p}) + i0} + \frac{v^{(\alpha)}(-\mathbf{p})\bar{v}^{(\alpha)}(-\mathbf{p})}{p_1^0 + \epsilon(\mathbf{p}) - i0}\right], \tag{8}$$

где $p_1 = P/2 + p$, $p_2 = P/2 - p$ — 4-импульсы электрона и позитрона. Тогда, считая, что взаимодействие частиц описывается локальным квазипотенциальным уравнением (2), и проектируя вершинную функцию на состояния с положительной энергией с помощью биспиноров Дирака [15]:

$$\Gamma^{(+)\ \alpha\beta}(p_1,p_2) = \frac{\bar{u}^{(\alpha)}(\mathbf{p})}{\sqrt{2\epsilon(\mathbf{p})}}\Gamma(p_1,p_2)\frac{v^{(\beta)}(\mathbf{p})}{\sqrt{2\epsilon(\mathbf{p})}} = \\ = (M - 2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})\psi_M^{\alpha\beta}(\mathbf{p}), \tag{9}$$

мы можем преобразовать интересующую нас часть амплитуды $M_0$ к виду

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}[\gamma^\omega\psi(p_1,p_2)] = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d\mathbf{p}}{2\epsilon(\mathbf{p})}\frac{\psi_M(\mathbf{p})}{2\sqrt{2}M[\epsilon(\mathbf{p}) + m]} \times \\ \times \mathrm{Tr}[\gamma^\omega(-\hat{p}_2 + m)\hat{\epsilon}(\hat{P} + M)(\hat{p}_1 + m)], \tag{10}$$

где мы также ввели релятивистский прекционный оператор на связанное $^3S_1$-состояние, в котором точно учитывается зависимость от $\mathbf{p}$ [16]:

$$\hat{\pi} = v(\mathbf{p})\bar{u}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{(-\hat{p}_2 + m)\hat{\epsilon}(\hat{P} + M)(\hat{p}_1 + m)}{[\epsilon(\mathbf{p}) + m]}. \tag{11}$$

Дифференциальная ширина распада $\pi^0$-мезона на фотон и атом позитрония определяется известным образом [17]:

$$d\Gamma(\pi^0 \to \gamma + Ps) = \frac{1}{32\pi^2 m_\pi^2} |M_0|^2 |\mathbf{P}| d\Omega_{\mathbf{P}}. \tag{12}$$

При этом законы сохранения энергии и импульса однозначно фиксируют частоту излучаемого фотона $\omega = (m_\pi/2)(1 - 4m^2/m_\pi^2)$. Вычислим вначале $w_{\rm th}(\pi^0 \to \gamma + Ps)$ в приближении нулевого относительного движения лептонов. Полагая для этого $p_1 = p_2 = P/2$ и вычисляя след в (10), а затем полную ширину из (12), мы получаем с учетом (4) и (6) следующий результат для относительной вероятности распада

$$w_{0\,\rm th} = \frac{\Gamma(\pi^0 \to \gamma + Ps)}{\Gamma(\pi^0 \to \gamma + \gamma)} = \frac{1}{2}\alpha^4 \left(1 - \frac{4m^2}{m_\pi^2}\right) \left[1 - \frac{\arcsin^2(m/m_q)}{\arcsin^2(m_\pi/2m_q)}\right]^2, \tag{13}$$

который совпадает с результатами работ [2, 3]. Множитель 1/2, стоящий в правой части (13), можно уточнить, выполнив суммирование по всем $S$-состояниям: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^3 = \zeta(3) = 1,202$. Необходимо отметить также, что квазипотенциальная волновая функция $\psi_M(\mathbf{p})$, стоящая в (10), удовлетворяет следующему условию нормировки [15]:

$$\int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} |\psi_M(\mathbf{p})|^2 = 2M. \tag{14}$$

Учтем теперь релятивистские поправки к (13), которые обусловлены относительным движением лептонов, образующих связанную систему, а также зависимостью рассматриваемой амплитуды распада от энергии связи $B$. Для этого разложим подынтегральные множители (10) по степеням $|\mathbf{p}|/m$ с точностью $O(\mathbf{p}^2/m^2)$, имея в виду, что $|\mathbf{p}| \sim \alpha$. Тогда релятивистская поправка порядка $\alpha^2$ в (10) определяется вычетом подынтегральной функции в полюсе волновой функции $\psi_M(\mathbf{p})$ [18]:

$$\int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)} \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \psi_M(\mathbf{p}) = -\frac{3}{4}\alpha^2 \psi_M(\mathbf{r} = 0). \tag{15}$$

Проводя замену (15) в (10) и учитывая что $B/m = -\alpha^2/4$, мы получаем релятивистскую поправку к (13) следующего вида:

$$w_{1\,\rm th} = \frac{1}{8}\alpha^2 w_{0\,\rm th}. \tag{16}$$

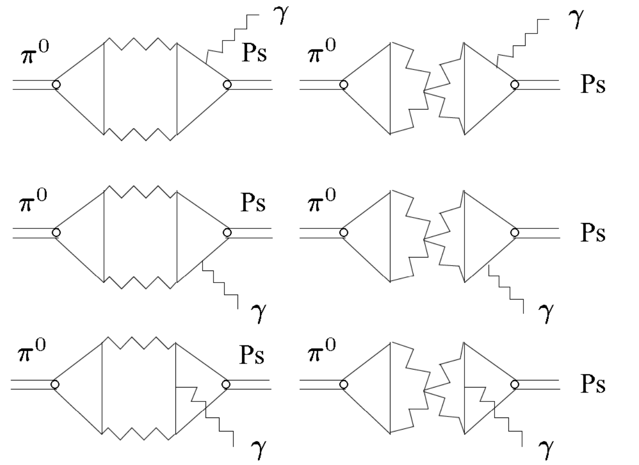


*Рис. 2.* Диаграммы Фейнмана, представляющие однопетлевые поправки порядка $O(\alpha)$ в ширине распада $\pi^0 \to \gamma + Ps$

### 3. Однопетлевые поправки $O(\alpha)$ к ширине распада $\pi^0 \to \gamma + Ps$

Единственные невычисленные до сих пор поправки $O(\alpha)$ в электромагнитной части амплитуды $M_0$ определяются шестью диаграммами Фейнмана, представленными на рис. 2. Для их расчета удобно использовать дисперсионный метод. Рассмотрим амплитуду, соответствующую первой из диаграмм рис. 2:

$$\begin{gathered} M_1 = N_c \sum_{f=u,d} (\lambda_f e_f^2)(4\pi\alpha)^{5/2} \psi(0) \times \\ \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 + i0} \frac{-i}{(Q-k)^2 + i0} \times \\ \times F_s(Q,k) \varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu} k^\alpha Q^\beta e_\gamma^\lambda \times \\ \times \operatorname{Tr}\left[\gamma^\mu (\hat{p}_1 - \hat{k} + m)\gamma^\nu (\hat{p}_1 - \hat{Q} + m)\gamma^\lambda \hat{\pi}\right] \times \\ \times \frac{-i}{(p_1 - k)^2 - m^2 + i0} \frac{-i}{(p_1 - Q)^2 - m^2 + i0}. \end{gathered} \tag{17}$$

При расчсте мнимой части этой амплитуды по $s = Q^2$ мы используем правило Куткоского [17], переводя фотоны в промежуточном состоянии на массовую поверхность. При этом функция $F_s(Q,k)$, определяемая интегралом по «кварковому треугольнику», переходит в функцию (6) при $P^2 = 0$. Выражения для знаменателей электронных пропагаторов упрощаются с учетом $\delta(k^2)$ и $\delta[(k-Q)^2]$:

$$\begin{gathered} \frac{1}{[(p_1 - k)^2 - m^2 + i0]} \to -\frac{1}{Pk}, \\ \frac{1}{[(p_1 - Q)^{-} m^2]} \to \frac{2}{Q^2 - P^2}. \end{gathered} \tag{18}$$

В результате после вычисления следа в (17) оказывается, что единственный ненулевой вклад в $\operatorname{Im} M_1$ определяется интегралом

$$I^{\mu\nu} = \int \frac{k^\mu k^\nu}{Pk} d^4k \delta(k^2) \delta(Q^2 - 2kQ) = \tag{19}$$

$$= F_1 g^{\mu\nu} + F_2 P^\mu P^\nu + F_3 Q^\mu Q^\nu + F_4 (Q^\mu P^\nu + Q^\nu P^\mu),$$

где мы записали ожидаемый ответ в виде суммы четырех слагаемых, $F_i$ — коэффициентные функции от $Q^2$, $P^2$. Умножая обе части равенства (19) последовательно на $g^{\mu\nu}$, $(g^{\mu\nu} - P^\mu Q^\nu/PQ)$, $(g^{\mu\nu} - P^\nu Q^\mu/PQ)$, $(g^{\mu\nu} - P^\mu P^\nu/P^2)$, мы получаем систему четырех уравнений для определения функций $F_i$. В мнимой части $M_1$ остается вклад только $F_1$ с тензором $g^{\mu\nu}$. Аналогично вычисляются мнимые части остальных фейнмановских амплитуд, представленных на рис. 2. Обозначая через $M$ полную однопетлевую амплитуду, получим ее мнимую часть в виде

$$\operatorname{Im} M(s) = N_c \sum_{f=u,d} (\lambda_f e_f^2)(4\pi\alpha)^{5/2} \frac{4 m_q g \psi(0)}{\pi^3} \times$$
$$\times \varepsilon^{\alpha\beta\sigma\rho} e^\alpha e_\gamma^\beta P^\sigma Q^\rho \frac{s}{(s-P^2)^3} \times \tag{20}$$
$$\times \left[ \frac{2P^2 s \ln(s/P^2)}{(s-P^2)(s+P^2)} - 1 \right] \operatorname{arctg}^2 \left( \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{4m_q^2 - s}} \right).$$

Вычисляя далее дисперсионный интеграл

$$M(Q^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} M(s) ds}{(s - Q^2 - i0)} \tag{21}$$

при $Q^2 \leqslant 0$ и аналитически продолжая амплитуду $M$ в область физических значений $Q^2$, получаем

$$M(Q^2 = m_\pi^2) = N_c \sum_{f=u,d} (\lambda_f e_f^2)(4\pi\alpha)^{5/2} \frac{m_q g \psi(0)}{\pi^4} \frac{1}{P^4} \times \tag{22}$$
$$\times \left(\frac{m^2}{m_\pi^2}\right) \left(\frac{m^2}{m_q^2}\right) \ln\left(\frac{2m}{m_\pi}\right) \varepsilon^{\alpha\beta\sigma\rho} e^\alpha e_\gamma^\beta P^\sigma Q^\rho,$$

где также было выполнено разложение амплитуды $M$ по малому параметру $m^2/m_\pi^2$ с точностью $o(m^2/m_\pi^2)$.

Интерференционные члены амплитуд $M$, $M_0$ дают искомую однопетлевую поправку $O(\alpha)$ в ширине распада $\pi^0$-мезона:

$$w_{2\,\mathrm{th}} = \alpha \frac{16 \left(m^2/m_q^2\right) \ln(2m/m_\pi) \left(1 - 4m^2/m_\pi^2\right)}{\left[\arcsin^2(m_\pi/2m_q) - \arcsin^2(m/m_q)\right]} w_{0\,\mathrm{th}}. \tag{23}$$

Относительная величина поправок (16), (23), полученных в данной работе, составляет $10^{-5}$. Таким образом, выражения (16), (23), а также полученная ранее в [5] основная часть $O(\alpha)$-вклада в амплитуду распада $\pi^0 \to \gamma + Ps$ в сумме дают главные электромагнитные поправки к вероятности $w_{0\,\mathrm{th}}$. В результате численное теоретическое значение для относительной вероятности распада оказывается равным $w_{\mathrm{th}} = 1,72393 \cdot 10^{-9}$, что хорошо согласуется с экспериментальным выражением (1). Дальнейшее уточнение формулы для $w_{\mathrm{th}}$ в случае увеличения экспериментальной точности измерения (1) может быть связано только с исследованием поправок в «сильной» части амплитуды распада $\pi^0 \to \gamma + Ps$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-02-17309).

**Литература**


1. *Окунь Л.Б.* Лептоны и кварки М., 1990.
2. *Неменов Л.Л.* // Ядерная физика. 1972. **15**. С. 1047.
3. *Козлов Г.А.* // Там же. 1988. **48**. С. 265.
4. *Barbieri R., Remiddi E.* // Nucl. Phys. 1978. **B141**. P. 413.
5. *Высоцкий М.И.* // Ядерная физика. 1979. **29**. С. 845.
6. Review of Particle Physics // Phys. Rev. 1996. **D54**. Part 1.
7. *Любошиц В.Л., Подгорецкий М.И.* // ЖЭТФ. 1981. **54**. С. 827.
8. *Дульян Л.С., Коцинян А.М., Фаустов Р.Н.* // Ядерная физика. 1977. **25**. С. 814.
9. *Меледин Г.В., Сербо В.Г., Сливков А.К.* // Письма в ЖЭТФ. 1971. **13**. С. 98.
10. *Ахундов А.А., Бардин Д.Ю., Неменов Л.Л.* // Ядерная физика. 1978. **27**. С. 1542.
11. *Любошиц В.Л.* // Там же. 1987. **45**. С. 1099.
12. *Мартыненко А.П., Фаустов Р.Н.* // ТМФ. 1985. **64**. С. 179.
13. *Мартыненко А.П., Фаустов Р.Н.* // Изв. вузов, Физика. 1994. № 10. С. 3; *Мартыненко А.П., Салеев В.А., Фаустов Р.Н.* // Ядерная физика. 1995. **58**. С. 1454.
14. *Okubo S., Feldman D.* // Phys. Rev. 1960. **117**. P. 279.
15. *Фаустов Р.Н.* // ТМФ. 1970. **3**. С. 240.
16. *Keung Wai-Yee, Muzinich I.J.* // Phys. Rev. 1983. **D27**. P. 1518.
17. *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Квантовая электродинамика. М., 1989.
18. *Khriplovich I.B., Milstein A.I.* Preprint BINP 94-30, 1994.


Поступила в редакцию
15.08.97