

УДК 514.8, 517.9

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ПОСТАНОВКА СПЕКТРАЛЬНО-ЭВОЛЮЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

С. А. Зададаев

(кафедра математики)

Предлагается построение спектрально-эволюционных операторов обратной задачи рассеяния методами дифференциальной геометрии. Обсуждаемый алгоритм использует аналогии между структурными уравнениями поверхности в E^3 и формализмом метода обратной задачи рассеяния.

Впервые взаимосвязь спектрально-эволюционных операторов с уравнениями структуры, вероятно, была выявлена в работе Сасаки [1], где построено явное выражение компонент 1-форм по операторам задачи рассеяния. Более детальное исследование возникающих при данном рассмотрении псевдосферических метрик представлено в работе [2]. В исследованиях [1, 2] ставится вопрос о нахождении 1-форм ω^1 , ω^2 и ω_{21} псевдосферических поверхностей, рассматриваемых в качестве геометрической интерпретации определенных типов нелинейных уравнений математической физики, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния.

Рассматриваемый нами подход связан с иной постановкой проблемы: от произвольного уравнения в частных производных мы переходим к псевдосферической метрике (Λ^2 -представление) с последующим определением соответствующих операторов задачи рассеяния. В данном контексте работа является естественным развитием формализма Λ^2 -класса дифференциальных уравнений и связанных с ним геометрических построений, введенных Э. Г. Позняком и А. Г. Поповым [3, 4]. Заложенный принцип соответствия нелинейного дифференциального уравнения с уравнением Гаусса позволяет сформулировать ряд утверждений, образующих геометрическую методику постановки задачи рассеяния в методе обратной задачи рассеяния (МОЗР) по заданному уравнению.

1. Λ^2 -представление и внутренняя геометрия поверхности

Рассмотрим на гладком двумерном многообразии M_2 произвольную метрику

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dt + G dt^2, \quad (1)$$

коэффициенты которой представимы в следующем виде:

$$\begin{aligned} E &= E(u, u_x, u_t, u_{xx}, \dots) = E[u], \\ F &= F(u, u_x, u_t, u_{xx}, \dots) = F[u], \\ G &= G(u, u_x, u_t, u_{xx}, \dots) = G[u], \end{aligned} \quad (2)$$

где $u = u(x, t)$ — неизвестная функция независимых переменных x и t . Если при этом задать гауссову кри-

визну K , то уравнение Гаусса [5]

$$H(E, F, G; K) = 0 \quad (3)$$

можно рассматривать как нелинейное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $u(x, t)$ [3, 4]:

$$\tilde{H}(u, u_x, u_t, \dots; K) = 0. \quad (4)$$

О п р е д е л е н и е 1. Дифференциальное уравнение $f[u] = 0$ относительно функции $u(x, t)$ называют *принадлежащим Λ^2 -классу*, если существуют такие $E[u]$, $F[u]$ и $G[u]$, которые при подстановке в уравнение Гаусса (3) при $K \equiv -1$ переводят (3) в данное уравнение $f[u] = 0$ [4].

О п р е д е л е н и е 2. Соответствующий набор $\{E[u], F[u], G[u]\}$ будем называть Λ^2 -представлением уравнения $f[u] = 0$. (В случае произвольной гауссовой кривизны говорят о G -классе, G -представлении [6].)

2. Система структурных уравнений поверхностей в E^3

Обратимся к системе структурных уравнений поверхности S в E^3 [7]:

$$\begin{cases} d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega_{21}, \\ d\omega^2 = \omega_{21} \wedge \omega^1, \\ d\omega_{21} = K\omega^1 \wedge \omega^2 \end{cases} \quad (5)$$

и определим 1-формы ω^1 , ω^2 и ω_{21} как решение системы (5) при условии, что метрика рассматриваемой поверхности задана соотношениями (1)–(2).

Теория подвижного репера дает следующую связь между ds^2 и ω^i :

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2. \quad (6)$$

Нетрудно убедиться, что участвующие в (1), (2) и (5), (6) величины связаны следующим образом:

$$\begin{cases} \omega^1 = E^{1/2} \cos(\theta^+) dx + G^{1/2} \cos(\theta^-) dt, \\ \omega^2 = E^{1/2} \sin(\theta^+) dx + G^{1/2} \sin(\theta^-) dt, \end{cases} \quad (7)$$

где $\theta^\pm = \theta \pm \frac{1}{2} \arccos \left[\frac{F}{(EG)^{1/2}} \right]$; $\theta(x, t)$ — произвольная функция. Соотношения (7) задают все допустимые 1-формы ω^1 и ω^2 , которые соответствуют произвольному выбору $E(x, t)$, $F(x, t)$ и $G(x, t)$ в метрике (1).

Подставляя (7) в первые два уравнения системы (5), получим алгебраическую систему линейных уравнений относительно компонент $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ 1-формы $\omega_{21} = \tilde{a}(x, t)dx + \tilde{b}(x, t)dt$, решение которой принимает вид

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{a} &= \frac{1}{2w^{1/2}} \left[\frac{1}{2} \frac{FG_x}{G} - \frac{1}{2} \frac{FE_x}{E} + F_x - E_t \right] + \theta_x, \quad (8) \\ \tilde{b} &= \frac{1}{2w^{1/2}} \left[\frac{1}{2} \frac{FG_t}{G} - \frac{1}{2} \frac{FE_t}{E} - F_t + G_x \right] + \theta_t, \quad (9) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{b} &= \frac{1}{2w^{1/2}} \left[\frac{1}{2} \frac{FG_t}{G} - \frac{1}{2} \frac{FE_t}{E} - F_t + G_x \right] + \theta_t, \quad (9) \end{aligned} \right.$$

где $w = EG - F^2 > 0$.

При этом третье уравнение системы (5) является уравнением Гаусса для данных E , F , G и произвольной дважды дифференцируемой функции $\theta(x, t)$:

$$\tilde{b}_x - \tilde{a}_t = -Kw^{1/2}. \quad (10)$$

3. Построение спектральных операторов, соответствующих произвольному уравнению из Λ^2 -класса

Пусть U и V — матричные операторы (2×2) , ψ — двумерная вектор-функция. Рассмотрим следующую спектрально-эволюционную задачу [8], используемую в методе обратной задачи рассеяния:

$$\begin{cases} \psi_x = U\psi, \\ \psi_t = V\psi. \end{cases} \quad (11)$$

$$\psi_t = V\psi. \quad (12)$$

Условие совместности этой системы имеет вид

$$U_t - V_x + [U, V] = 0, \quad (13)$$

где $[U, V] = UV - VU$. Для того чтобы уравнение (13) было нетривиальным, оператор U должен зависеть от спектрального параметра ξ , причем $\xi_t = 0$.

Сформулируем теорему, связывающую метрику постоянной гауссовой кривизны с операторами задачи (11)–(12).

Т е о р е м а 1. *Рассмотрим некоторое нелинейное уравнение $f[u] = 0$. Пусть коэффициенты $\{E[u], F[u], G[u]\}$ метрики (1) постоянной гауссовой кривизны $K = \text{const}$ являются G -представлением данного нелинейного уравнения.*

Тогда операторы U и V задачи (11)–(12), отвечающей рассматриваемому уравнению $f[u] = 0$ с точностью до калибровочных преобразований, принимают следующий вид:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \tilde{a} & \frac{1}{2} (-K)^{1/2} E^{1/2} \exp(i\theta^+) \\ \frac{1}{2} (-K)^{1/2} E^{1/2} \exp(-i\theta^+) & -\frac{i}{2} \tilde{a} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \tilde{b} & \frac{1}{2} (-K)^{1/2} G^{1/2} \exp(-i\theta^-) \\ \frac{1}{2} (-K)^{1/2} G^{1/2} \exp(i\theta^-) & -\frac{i}{2} \tilde{b} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Функции θ^+ и θ^- задаются соотношениями (7); $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ — соотношениями (8)–(9).

Замечание. В описанном случае уравнение совместности задачи (11)–(12) $U_t - V_x + [U, V] = 0$ совпадает с уравнением Гаусса $f[u] = 0$.

Справедливость теоремы 1 может быть проверена путем непосредственной подстановки операторов U и V в уравнение совместности.

Таким образом, теорема 1 предоставляет возможность формального выражения операторов спектрально-эволюционной задачи для исследуемого уравнения $f[u] = 0$ по его Λ^2 -представлению. Произвольная функция $\theta(x, t)$, играющая роль некоторого калибровочного преобразования, может быть использована (как будет показано ниже) для приведения операторов к модифицированному виду задачи Захарова–Шабата.

4. Λ^2 -представление для произвольного нелинейного дифференциального уравнения

Покажем, что произвольное уравнение с частными производными относительно функции $u(x, t)$ принадлежит Λ^2 -классу.

Для доказательства данного утверждения рассмотрим коэффициенты псевдосферической метрики (Λ^2 -представление), зависящие от произвольной функции $u(x, t)$, тождественно удовлетворяющие уравнению Гаусса:

$$\begin{aligned} E(x, t) &= (u_x)^2, \\ F(x, t) &= u_x(u_t - u), \\ G(x, t) &= 1 + (u_t - u)^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Компоненты $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ 1-формы ω_{21} принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{a}(x, t) &= -u_x - \frac{1}{2} [\arctg(u_t - u)]_x + \theta_x, \\ \tilde{b}(x, t) &= u - u_t - \frac{1}{2} [\arctg(u_t - u)]_t + \theta_t. \end{aligned}$$

Заметим, что для приведения операторов U и V к модифицированному виду задачи Захарова–Шабата [8]:

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} -i\xi & q \\ r & i\xi \end{pmatrix}, \quad \tilde{V} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}$$

достаточно положить

$$\theta(x, t) = u + \frac{1}{2} [\arctg(u_t - u)] - \xi x.$$

Следует также отметить неединственность Λ^2 -представления: существует ряд других выражений Λ^2 -представления для произвольного уравнения $f[u] = 0$ [6], приводящих к различным спектрально-эволюционным операторам.

5. Общая схема постановки спектральной задачи для уравнения, принадлежащего Λ^2 -классу

Рассмотрим общую схему постановки спектрально-эволюционной задачи.



6. Реализация общей схемы для уравнения sin-Гордона

Рассмотрим сферическую метрику

$$ds^2 = dx^2 - 2 \cos(u) dx dt + dt^2 \quad (K \equiv +1).$$

Подстановка в уравнение Гаусса приводит к уравнению sin-Гордона

$$u_{xt} = \sin(u).$$

Построим операторы U и V в соответствии с формулами (14)–(15):

$$E = 1; \quad G = 1; \quad F = -\cos(u); \quad W = \sin(u);$$

$$\tilde{a} = \frac{u}{2}x + \theta_x; \quad \tilde{b} = -\frac{u}{2}t + \theta_t;$$

$$\tilde{\theta}^+ = \theta - \frac{u}{2} + \frac{\pi}{2}; \quad \tilde{\theta}^- = \theta + \frac{u}{2} - \frac{\pi}{2}.$$

Пусть $\theta = -u_x/2 + \pi/2$. Отметим, что варьирование θ эквивалентно соответствующим калибровочным преобразованиям.

Полученным функциям $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\theta}^+$ и $\tilde{\theta}^-$ отвечают следующие искомые операторы U и V :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \exp(-iu) \\ -\frac{i}{2} \exp(iu) & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} u_t & \frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{i}{2} u_t \end{pmatrix}.$$

Перейдем к рассмотрению вопроса о введении спектрального параметра. Локальная симметрия уравнения sin-Гордона допускает лоренцевы сжатия и растяжения: $x \rightarrow \zeta x, t \rightarrow t/\zeta$. Производя указанную замену в спектральной задаче, а следовательно, и в операторах, получаем операторы, содержащие спектральный параметр ζ :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \zeta \exp(-iu) \\ -\frac{i}{2} \zeta \exp(iu) & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} u_t & \frac{i}{2} \zeta \\ \frac{i}{2} \zeta & \frac{i}{2} u_t \end{pmatrix}.$$

Запишем калибровочное преобразование W :

$$W = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{i}{2} \frac{u}{2}\right) & \exp\left(-\frac{i}{2} \frac{u}{2}\right) \\ -i \exp\left(\frac{i}{2} \frac{u}{2}\right) & i \exp\left(-\frac{i}{2} \frac{u}{2}\right) \end{pmatrix},$$

приводящее спектрально-эволюционные операторы к модифицированному виду:

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} -i\xi & -\frac{u}{2}x \\ \frac{u}{2}x & i\xi \end{pmatrix}, \quad \tilde{V} = \frac{i}{4\xi} \begin{pmatrix} \cos(u) & \sin(u) \\ \sin(u) & -\cos(u) \end{pmatrix}.$$

Реализация метода обратной задачи рассеяния для найденных операторов позволяет построить N -солитонные решения уравнения sin-Гордона [8].

Заключение

Представленные выше результаты позволяют получить в явном виде спектрально-эволюционные операторы для любого нелинейного дифференциального уравнения с решениями достаточной гладкости из Λ^2 -класса.

Полученные формулы (14)–(15) содержат как неизвестную функцию $u(x, t)$, так и ее первые частные производные. В частности, исследование законов сохранения для эволюционного уравнения $u_t = f[u]$ позволяет исключить зависимость от $u_t(x, t)$ и понизить порядок по содержащимся в выражениях производным $u(x, t)$ по x .

Несмотря на явное выражение операторов U и V , приведенных к модифицированному виду задачи Захарова–Шабата для уравнения $f[u] = 0$, вопрос об интегрируемости методом обратной задачи рассеяния в целом остается открытым.

Автор выражает глубокую признательность д-ру физ.-мат. наук А. Г. Попову за полезные обсуждения работы.

Литература

1. *Sasaki R.* // Nucl. Phys. 1979. **В 154**. Р. 343.
2. *Chern S.S., Tenenblat K.* // Studies in Appl. Math. 1986. **74**. Р. 55.
3. *Позняк Э.Г., Попов А.Г.* // ДАН. 1993. **332**, № 4. С. 418.
4. *Позняк Э.Г., Попов А.Г.* // Итоги науки и техники. Сер. Геометрия-2. 1994. С. 5.
5. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. М., 1986.
6. *Попов А.Г.* Методы геометрии Лобачевского в некоторых классах нелинейных задач математической физики: Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1995.
7. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М., 1971.
8. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М., 1987.

Поступила в редакцию
03.10.97