

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.2:534

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВОЗМОЖНОСТЕЙ. МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Оценивание нечетких элементов и параметров их распределений

Ю. П. Пытьев

(кафедра компьютерных методов физики)

Рассматриваются методы оптимального оценивания нечетких элементов и параметров их распределений, основанные на минимизации возможности и (или) необходимости ошибки оценивания.

Введение

В последние два десятилетия внимание исследователей, работающих в различных предметных областях, привлекают проблемы оптимизации оценивания и принятия решений в нечеткой обстановке, при нечетких целях и предпочтениях, при нечетких ограничениях и множествах альтернатив. Исследованы нечеткие варианты теории игр, математического программирования, теории полезности и т. д. (см., напр., [1–6]).

В предлагаемой работе рассматриваются методы оптимизации оценивания нечетких элементов и параметров их распределений, основанные на минимизации возможности (или/и необходимости) ошибки оценивания. Изложение следует схемам, принятым в теориях статистических решений и статистического оценивания [7, 8].

1. Оценивание нечеткого элемента

Рассмотрим задачу оценивания ненаблюдаемого нечеткого элемента $\xi \in X$ [9], в которой требуется указать «четкий» элемент $\tilde{X}$, значение которого можно считать в известном смысле наилучшей оценкой ξ . Например, одна из простейших оценок нечеткого элемента $\xi \in X$ — наиболее возможное его значение $x_\xi \in \tilde{X} = X$, выбираемое из множества $^*)$

$$\left\{ x \in X, \varphi^\xi(x) = \max_{y \in \tilde{X}} \varphi^\xi(y) \right\} = \\ = \left\{ x \in X, P^\xi(\{x\}) = \max_{y \in \tilde{X}} P^\xi(\{y\}) \right\}.$$

Рассмотрим класс методов оптимального оценивания, основанных на понятии нечеткого отношения погрешности $(X \times \tilde{X}, l(\cdot, \cdot))$, в котором $l(x, y)$ — возможность ошибки, обусловленной заменой $x \in$

$\in X$ в равенстве $\xi = x$ на $y \in \tilde{X}$ (аналог величины ошибки) $^{**})$. При фиксированном $y \in \tilde{X}$ речь идет о нечетком множестве $(X, l(\cdot, y))$ [11], возможность ошибки отождествляется с возможностью $l(x, y)$ включения $x \in X$ в это множество [12].

Оценивание ξ при известном распределении. Если $\varphi^\xi(x)$, $x \in X$, — распределение возможностей значений нечеткого элемента $\xi \in X$, то интеграл $l(\cdot, y)$ по P^ξ

$$L(y) = \sup_{x \in X} \min(\varphi^\xi(x), l(x, y)), \quad y \in \tilde{X}, \quad (1)$$

есть возможность включения ξ в нечеткое множество $(X, l(\cdot, y))$ [9], зависящее от $y \in \tilde{X}$, и, следовательно, — возможность ошибки, обусловленной выбором $y \in \tilde{X}$ как значения нечеткого элемента $\xi \in X$, — в качестве его оценки.

О п р е д е л е н и е 1. P -оптимальной оценкой ξ назовем любой элемент $y_* \in \tilde{X}$, для которого возможность ошибки (1) минимальна: $L(y_*) = \min_{y \in \tilde{X}} L(y)$.

Согласно выражению (1) для $L(\cdot)$ y_* определяется так, чтобы для всякого $x \in X$ была мала возможность $\varphi^\xi(x)$ значения $\xi = x$, для которого возможность $l(x, y_*)$ ошибки велика, и наоборот — чтобы была мала возможность ошибки $l(x, y_*)$, отвечающей значению $\xi = x$, возможность которого $\varphi^\xi(x)$ велика. Качество P -оптимальной оценки y_* определяется величиной $L(y_*)$ возможности ошибки оценивания нечеткого элемента ξ значением y_* .

Пусть на $X = \tilde{X}$ задана топология, $l_\Delta(x, y) = 0$ при $x \in \Delta(y)$, $l_\Delta(x, y) = 1$ при $x \in X \setminus \Delta(y)$, где $\Delta(y)$ — замкнутая окрестность $y \in X$, такая, что для каждого $x \in X$ найдется $y \in X$, при котором $x \in \Delta(y)$. Если при $l(\cdot, \cdot) = l_\Delta(\cdot, \cdot)$ задача $L(y) \sim \min_{y \in X}$

разрешима, то $\Delta(y_*)$, очевидно, содержит x_ξ — наиболее возможное значение ξ , и если последнее единственно, то $y_* \rightarrow x_\xi$ при $\Delta(y_*) \rightarrow \{y_*\}$. Так как при

этом $l_\Delta(x, y) \rightarrow l_0(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = y \\ 1 & \text{при } x \neq y \end{cases}$, то далее,

говоря об оценке $y_* = x_\xi$ максимальной возможностью, будем считать, что она получается минимизацией

$^*)$ В этой работе возможность $P(\cdot)$ считается продолженной на алгебру $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X [10].

$^{**})$ Например, $l(x, y) = (2/\pi) \arctg(\varepsilon^2(x - y)^2)$, или $l(x, y) = \min(1, (x - y)^2)$, если $X = \tilde{X} = (-\infty, \infty)$.

$L(y)$ (1) при $l(\cdot, \cdot) = l_0(\cdot, \cdot)$, имея в виду рассмотренный предельный переход.

Согласно определению интеграла по необходимости, данному в работе [13],

$$M(y) = \neg \sup_{x \in X} \min(\varphi^\xi(x), \neg l(x, y)) = \neg p_\varphi(\neg l(\cdot, y)) = \inf_{x \in X} \max(\neg \varphi^\xi(x), l(x, y)) = n_{\neg \varphi}(l(\cdot, y)), \quad (2)$$

— необходимость ошибки, сопутствующей выбору $y \in \tilde{X}$ как оценки ξ .

О п р е д е л е н и е 1*. N -оптимальной оценкой ξ назовем любой элемент $y^* \in \tilde{X}$, минимизирующий необходимость ошибки (2): $M(y^*) = \min_{y \in \tilde{X}} M(y)$; величина $M(y^*)$ определяет качество N -оптимальной оценки.

Значение $y^* \in \tilde{X}$ определяется так, чтобы для некоторых $x \in X$ были малы как необходимость $\neg \varphi^\xi(x)$ неравенства $\xi \neq x$ (или велика возможность равенства $\xi = x$), так и возможность ошибки $l(x, y^*)$.

Пусть для любого $x \in X$ $\inf_{y \in \tilde{X}} l(x, y) = 0$ и достигается при $y \in \tilde{X}(x)$. Тогда $\inf_{y \in \tilde{X}} M(y) = \inf_{x \in X} \max(\neg \varphi^\xi(x), \inf_{y \in \tilde{X}} l(x, y)) = \inf_{x \in X} \neg \varphi^\xi(x) = 0$ и если $\max_{x \in X} \varphi^\xi(x) = 1$ достигается при $x \in X^\xi \subset X$,

то N -оптимальной оценкой будет любой элемент $y^* \in \bigcup_{x \in X^\xi} \tilde{X}(x)$, для которого $M(y^*) = 0$.

Если, в частности, в (2) $X = \tilde{X}$, $l(x, y) = l^0(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = y \\ > 0 & \text{при } x \neq y \end{cases}$, $x, y \in X$, то $\min_{y \in \tilde{X}} M(y) = \inf_{x \in X} \max(\neg \varphi^\xi(x), \min_{y \in \tilde{X}} l^0(x, y)) = \inf_{x \in X} \neg \varphi^\xi(x) = 0$

и достигается при $y = y^* = x_\xi \in X^\xi$, т.е. N -оптимальной оценкой ξ при $l(\cdot, \cdot) = l^0(\cdot, \cdot)$ является оценка максимальной возможности.

Поскольку решения задач $L(y) \sim \min_{y \in \tilde{X}}$ и $M(y) \sim \min_{y \in \tilde{X}}$ могут и не совпадать (рис. 1), представляет

интерес параметрический класс $\mathcal{K}$ Парето — оптимальных оценок, определяемых как решения семейства задач $\max(\varepsilon L(y), (1 - \varepsilon)M(y)) \sim \min_{y \in \tilde{X}}$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

Класс $\mathcal{K}$, очевидно, содержит N - и P -оптимальные оценки, если таковые существуют. Если

$$\begin{aligned} \max(p_\varphi(l(\cdot, y)), p_\varphi(\neg l(\cdot, y))) &= \\ &= p_\varphi(\max(l(\cdot, y), \neg l(\cdot, y))) = 1, \quad y \in \tilde{X}, \end{aligned} \quad (3)$$

то $L(y) \geq M(y)$, так как в силу условия (3) $p_\varphi(l(\cdot, y)) \geq \neg p_\varphi(\neg l(\cdot, y))$, и более того,

$$M(y) = n_{\neg \varphi}(l(\cdot, y)) > 0 \Rightarrow p_\varphi(l(\cdot, y)) = L(y) = 1,$$

$$L(y) = p_\varphi(l(\cdot, y)) < 1 \Rightarrow n_{\neg \varphi}(l(\cdot, y)) = M(y) = 0,$$

поскольку, согласно (2), $n_{\neg \varphi}(l(\cdot, y)) + p_\varphi(l(\cdot, y)) = 1$, $y \in \tilde{X}$. В этом случае класс $\mathcal{K}$ устроен достаточно просто. А именно, если $\min_{y \in \tilde{X}} L(y) < 1$, то $\mathcal{K}$ совпадает

с множеством решений задачи $L(y) \sim \min_{y \in \tilde{X}}$, поскольку на последнем $M(y) = 0$. Если же $\min_{y \in \tilde{X}} L(y) = 1$, то $\mathcal{K}$ состоит из решений задачи $M(y) \sim \min_{y \in \tilde{X}}$.

Оценивание ξ при неизвестном распределении. Если распределение $\varphi^\xi(\cdot)$ неизвестно, то оценка может быть определена как решение задачи на максимакс $\sup_{x \in X} l(x, y) \sim \min_{y \in \tilde{X}}$. Такая оценка минимизирует максимальную возможность ошибки и является решением задачи $L(y) \sim \min_{y \in \tilde{X}}$ при $\varphi^\xi(x) = 1$, $x \in X$,

в (1). Ясно, что в этом случае возможность ошибки не меньше, чем при любом известном распределении $\varphi^\xi(\cdot)$; в этом смысле распределение $\varphi^\xi(x) = 1$, $x \in X$, следует считать наименее благоприятным. Вместе с тем при этом распределении необходимость ошибки оценивания ξ произвольным элементом $y \in \tilde{X}$ $M(y) = \inf_{x \in X} l(x, y)$ не больше, чем при любом другом (известном) распределении ξ . Дело в том, что когда

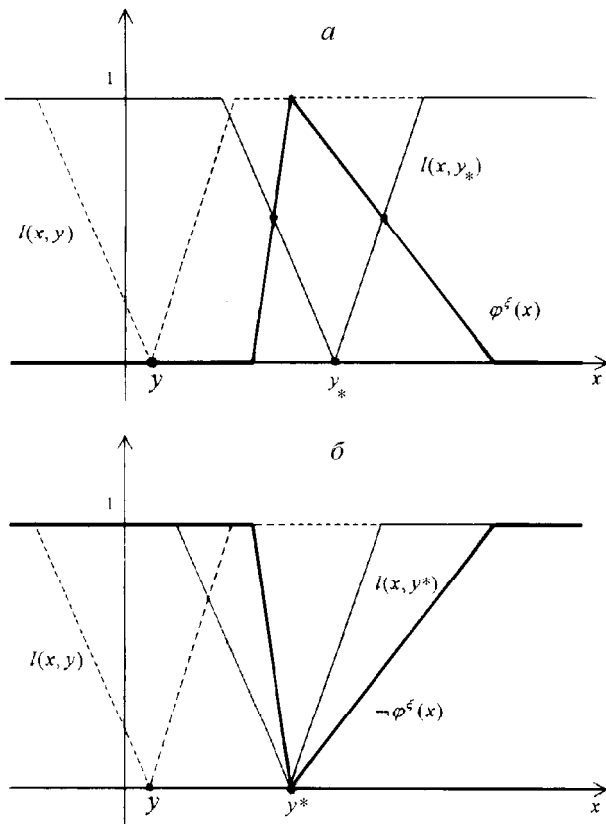


Рис. 1. P - и N -оптимальные оценки при $l(x, y) = \min(|x - y|, 1)$, $x, y \in X = \tilde{X} = (-\infty, \infty)$: решение y_* задачи $L(y) \sim \min_{y \in \tilde{X}}$ (а) и решение y^* задачи $M(y) \sim \min_{y \in \tilde{X}}$ (б)

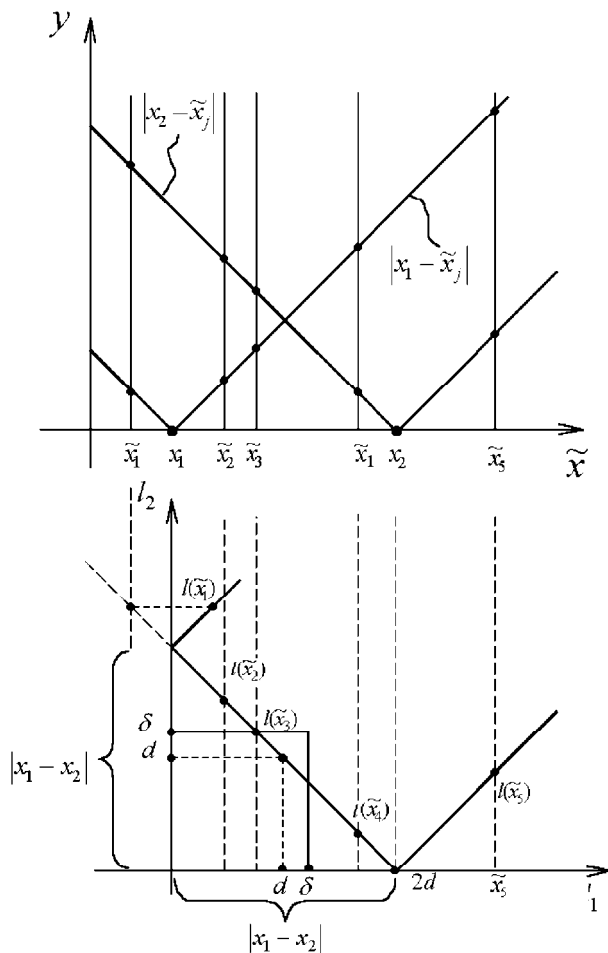


Рис. 2. Значения ξ и значения оценки ξ ; графики $|x_1 - \tilde{x}|$ и $|x_2 - \tilde{x}|$ как функции $\tilde{x}$. Точка $l(\tilde{x}_j)$ на нижнем рисунке имеет координаты $l_1(\tilde{x}_j)$ и $l_2(\tilde{x}_j)$, $j = 1, 2, \dots, 5$

все значения $\xi \in X$ равновозможны, любое утверждение $\xi = y$ нельзя считать непременно ошибочным.

Рандомизация оценивания. Как при известном, так и при неизвестном распределении возможностей значений ξ , оценки, рассмотренные в предыдущих пунктах, могут быть в известном смысле улучшены, если задача оценивания должна решаться многократно. В таком случае рандомизированная стратегия оценивания позволит уменьшить возможность ошибки в среднем.

Пусть, например, $\tilde{X} = \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m\}$ — множество значений оценки ξ . Рандомизированная стратегия оценивания сводится к выбору в качестве оценки ξ значения $\tilde{x}_j$ с вероятностью p_j , $j = 1, \dots, m$, $\sum_{j=1}^m p_j = 1$. P -оптимальную рандомизированную стратегию определим условием

$$EL(\cdot) = \sum_{j=1}^m L(\tilde{x}_j)p_j \sim \min_p, \quad p = (p_1, \dots, p_m),$$

согласно которому она обеспечивает минимальность средней возможности ошибки; E — символ математического ожидания.

Ограничимся анализом примера, в котором ξ принимает два значения: x_1 и x_2 , $\varphi^\xi(x_1) = \varphi^\xi(x_2) = 1$, $X = \{x_1, x_2\}$. Оценка ξ должна выбираться из множества $\tilde{X} = \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_5\}$, возможность ошибки определяется равенством $l(x_i, \tilde{x}_j) = \min(|x_i - \tilde{x}_j|, 1)$, $i = 1, 2$; $j = 1, \dots, 5$. Обозначим $l(x_i, \tilde{x}_j) = l_i(\tilde{x}_j)$, $i = 1, 2$, $j = 1, \dots, 5$, и обратимся к геометрической иллюстрации задачи оценивания. Как видно из рис. 2, P -оптимальная рандомизированная стратегия оценивания предписывает в качестве оценки ξ использовать $\tilde{x}_3$ с вероятностью p_3 , $\tilde{x}_4$ с вероятностью p_4 и определяется условиями

$$p_4 l_1(\tilde{x}_4) + p_3 l_1(\tilde{x}_3) = p_4 l_2(\tilde{x}_4) + p_3 l_2(\tilde{x}_3), \quad p_3 + p_4 = 1,$$

обеспечивающими минимальность средней возможности ошибки. Последняя равна $d = |x_1 - x_2|/2$, в то время как P -оптимальная оценка $\tilde{x}_3$ гарантирует возможность ошибки $\delta > d$.

Оценивание с учетом результата наблюдения. Теперь рассмотрим задачу, в которой требуется оценить (ненаблюдаемый) нечеткий элемент $\eta \in Y$, используя значение (наблюдаемого) нечеткого элемента $\xi \in X$. Речь идет об определении стратегии $d(\cdot): X \rightarrow \tilde{Y}$ оценивания, позволяющей каждому значению $\xi = x \in X$ поставить в соответствие значение $y = d(x) \in \tilde{Y}$ в качестве оценки η .

Пусть $\xi, \eta \in X \times Y$ — пара нечетких элементов, $\varphi^{\xi, \eta}(\cdot, \cdot)$ — их распределение, $(Y \times \tilde{Y}, l(\cdot, \cdot))$ — нечеткое отношение погрешности. P -оптимальную оценку $\hat{\eta}_* = d_*(\xi)$, минимизирующую возможность ошибки, определим из условия

$$L(d(\cdot)) = \sup_{x, y \in X \times Y} \min(\varphi^{\xi, \eta}(x, y), l(y, d(x))) \sim \min_{d(\cdot): X \rightarrow \tilde{Y}}. \quad (4)$$

Функция $d_*(\cdot): X \rightarrow \tilde{Y}$, удовлетворяющая условию (4): $L(d_*(\cdot)) = \min_{d(\cdot): X \rightarrow \tilde{Y}} L(d(\cdot))$, задает P -оптимальную стратегию оценивания η по наблюдению ξ .

Т е о р е м а 1. 1) Нечеткий элемент $d_*(\xi)$ — P -оптимальная оценка η , если $d = d_*(x)$ является решением следующей задачи на минимум для условной возможности [12] ошибки при условии $\xi = x$:

$$L(d|x) = \sup_{y \in Y} \min(\varphi^{\eta|\xi}(y|x), l(y, d)) \sim \min_{d \in \tilde{Y}}, \quad x \in X; \quad (5)$$

2) нечеткий элемент $d_*(\xi)$ — P -оптимальная оценка η , если и только если $d_*(x)$ является решением следующей задачи на минимум:

$$L(d, x) = \sup_{y \in Y} \min(\varphi^{\xi, \eta}(x, y), l(y, d)) \sim \min_{d \in \tilde{Y}}, \quad x \in X. \quad (5^*)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть минимум в (5) достигается при $d = d_* = d_*(x)$. Так как согласно определению условного распределения η при условии $\xi = x$ имеет место равенство $\min(\varphi^{\eta|\xi}(y|x), \varphi^\xi(x)) = \varphi^{\xi, \eta}(x, y)$, $x \in X$,

$y \in Y$, [9], то

$$\begin{aligned} & \sup_y \min(\varphi^{\xi, \eta}(x, y), l(y, d_*)) = \\ & = \min(\varphi^{\xi}(x), \sup_y \min(\varphi^{\eta| \xi}(y|x), l(y, d_*))) \leq \\ & \leq \min(\varphi^{\xi}(x), \sup_y \min(\varphi^{\eta| \xi}(y|x), l(y, d))) = \\ & = \sup_y \min(\varphi^{\xi, \eta}(x, y), l(y, d)), \end{aligned}$$

$d \in \tilde{Y}$, и, следовательно, $d_* = d_*(x) \in \tilde{Y}$ — точка минимума и для $\sup_y \min(\varphi^{\xi, \eta}(x, y), l(y, d))$, $d \in \tilde{Y}$.

Поэтому

$$\begin{aligned} & \min_{d(\cdot)} \sup_{x, y} \min(\varphi^{\xi, \eta}(x, y), l(y, d(x))) \geq \\ & \geq \sup_x \min_{d(\cdot)} \sup_y \min(\varphi^{\xi, \eta}(x, y), l(y, d(x))) = \\ & = \sup_{x, y} \min(\varphi^{\xi, \eta}(x, y), l(y, d_*(x))), \end{aligned}$$

т.е. $d_*(\cdot)$ — P -оптимальная стратегия, решение задачи (4). Эти же соотношения доказывают второе утверждение. ■

Аналогичный результат имеет место для N -оптимальной стратегии $d^*(\cdot): X \rightarrow \tilde{Y}$, минимизирующей необходимость

$$M(d(\cdot)) = \inf_{x, y \in X \times Y} \max(\neg \varphi^{\xi, \eta}(x, y), l(y, d(x))) \quad (4^*)$$

ошибки оценивания нечеткого элемента $\eta \in Y$ посредством $d(\xi)$.

Т е о р е м а 1*. 1) Нечеткий элемент $d^*(\xi)$ — N -оптимальная оценка η , если $d^*(\cdot)$ — решение задачи на минимум для условной необходимости ошибки

$$M(d|x) = \inf_{y \in \tilde{Y}} \max(\neg \varphi^{\eta| \xi}(y|x), l(y, d)) \sim \min_{d \in \tilde{Y}}$$

при условии $\xi = x \in X$;

2) нечеткий элемент $d^*(\xi)$ — N -оптимальная оценка η , если и только если $d^*(x)$ — решение задачи на минимум

$$M(d, x) = \inf_{y \in \tilde{Y}} \max(\neg \varphi^{\xi, \eta}(x, y), l(y, d)) \sim \min_{d \in \tilde{Y}}, \quad x \in X.$$

Доказательство может быть получено по схеме доказательства теоремы 1, если воспользоваться следующим выражением для $M(d(\cdot))$ (4*):

$$\begin{aligned} M(d(\cdot)) &= \inf_{x \in X} \max(M(d(x)|x), \neg \varphi^{\xi}(x)) = \\ &= \inf_{x \in X} \max(\neg \varphi^{\xi}(x), \inf_{y \in Y} \max(\neg \varphi^{\eta| \xi}(y|x), l(y, d(x)))) \end{aligned}$$

основанным на равенстве

$$\neg \varphi^{\xi, \eta}(x, y) = \max(\neg \varphi^{\eta| \xi}(y|x), \neg \varphi^{\xi}(x)),$$

эквивалентном равенству

$$\varphi^{\xi, \eta}(x, y) = \min(\varphi^{\eta| \xi}(y|x), \varphi^{\xi}(x)),$$

определяющему условное распределение $\varphi^{\eta| \xi}(\cdot|x)$, $x \in X$, $y \in Y$, [9]. ■

З а м е ч а н и е. Если значение ξ неизвестно, то P -оптимальная оценка нечеткого элемента η должна быть основана на его (априорном) распределении $\varphi^{\eta}(y) = \sup_{x \in X} \varphi^{\xi, \eta}(x, y)$, $y \in Y$. В таком случае качество P -оптимальной оценки η будет, вообще говоря, хуже, поскольку

$$\sup_y \min(\varphi^{\eta}(y), l(y, d)) \geq \sup_y \min(\varphi^{\xi, \eta}(x, y), l(y, d)),$$

$$d \in \tilde{Y}, \quad x \in X.$$

С другой стороны, если нечеткие элементы ξ и η независимы, то знание значения ξ не улучшает оценку η , поскольку в этом случае в (5)

$$\varphi^{\eta| \xi}(y|x) = \varphi^{\eta}(y), \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

2. Оценивание параметра распределения нечеткого элемента

Пусть $\varphi^{\xi}(x, t)$, $x \in X$, — распределение нечеткого элемента $\xi \in X$, зависящее от (неизвестного) параметра $t \in T$, $(T \times \tilde{T}, l(\cdot, \cdot))$ — нечеткое отношение погрешности, заданное на множестве значений параметра и его оценки. В задаче оценивания по известному значению x нечеткого элемента ξ требуется оценить значение параметра t .

О п р е д е л е н и е 2. Нечеткий элемент $\hat{t} = d_*(\xi)$ назовем P -оптимальной оценкой параметра $t \in T$, а функцию $d_*(\cdot): X \rightarrow \tilde{T}$ — P -оптимальной стратегией оценивания, если

$$L(d_*(\cdot)) = \min_{d(\cdot): X \rightarrow \tilde{T}} L(d(\cdot)), \quad (6)$$

где

$$L(d(\cdot)) = \sup_{t \in T} \sup_{x \in X} \min(\varphi^{\xi}(x, t), l(t, d(x))). \quad (7)$$

В данном случае $L(d(\cdot))$ — максимальная по $t \in T$ возможность $\sup_{x \in X} \min(\varphi^{\xi}(x, t), l(t, d(x)))$ включения нечеткого элемента ξ в нечеткое множество $(X, l(t, d(\cdot)))$, зависящее от $t \in T$ и стратегии $d(\cdot)$. В свою очередь возможность включения ξ в это нечеткое множество есть возможность ошибки оценивания $t \in T$ нечетким элементом $d(\xi) \in T$.

Оценка $d_*(\xi)$ гарантирует минимальность максимальной по $t \in T$ возможности $L(d(\cdot))$ ошибки оценивания неизвестного параметра $t \in T$ значением нечеткого элемента $d_*(\xi) \in \tilde{T}$. Формально эта задача не отличается от задачи (4).

Более того, и по сути параметр $t \in T$ распределения $\varphi^{\xi}(\cdot, t)$ нечеткого элемента $\xi \in X$ естественно

обретает черты нечеткого элемента $\tau \in T$, поскольку при $\xi = x$ возникает вопрос о *возможных* его (параметра) значениях.

Если, например, $\xi = t + \nu$, $\varphi^\nu(\cdot)$ — распределение $\nu \in X = T$, то при $\xi = x$ значение $\varphi^\nu(x - t)$ естественно считать возможностью того, что t — значение параметра распределения ξ , т.е. возможностью равенства $\tau = t \in X$. Вслед за этим возникает вопрос и о том, что известно о параметре $t \in T$ априори, до измерения ξ . Можно, например, задать априорное распределение $\varphi^\tau(\cdot)$, причем, если $\varphi^\tau(t) = 1$, $t \in T$, то априори все значения параметра считаются одинаково возможными. Если придерживаться этой точки зрения на параметр распределения, то $\varphi^\xi(\cdot, t)$ следует считать условным распределением $\varphi^{\xi|\tau}(\cdot|t)$ нечеткого элемента $\xi \in X$ при условии $\tau = t \in T$. Поскольку распределение $\varphi^{\xi, \tau}(x, t) = \min(\varphi^{\xi|\tau}(x|t), \varphi^\tau(t)) = \min(\varphi^{\tau|\xi}(t|x), \varphi^\xi(x))$, $x, t \in X \times T$, при $\varphi^\tau(t) = 1$, $t \in T$, совпадает с $\varphi^{\xi|\tau}(x|t) = \varphi^\xi(x, t)$, $x \in X$, $t \in T$, то в этом случае задача (6), (7) совпадает с задачей (4), ее решение определяется условным распределением $\varphi^{\tau|\xi}(\cdot|\cdot)$ и дано в теореме 1.

Очевидно, что P -оптимальная стратегия $d_*(\cdot)$ определяется как решение задачи на минимум $\sup_{t \in T} \min(\varphi^\xi(x, t), l(t, d)) \sim \min_{d \in \tilde{T}}$, зависящее от $x \in X$ как от параметра.

Если, в частности, $T = \tilde{T}$, $l(t, d) = l_0(t, d)$, $t, d \in T$, то с учетом оговоренной выше условности P -оптимальная стратегия определяется решением уравнения $\varphi^\xi(x, d_*(x)) = \max_{t \in T} \varphi^\xi(x, t)$, $x \in X$. Нечеткий элемент $d_*(\xi)$ можно назвать оценкой максимальной возможности параметра распределения, поскольку

ку возможность $\varphi^\xi(x, t)$ равенства $\xi = x$ максимальна при $t = d_*(x)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-01081) и программы ISSEP (грант p97-170).

Литература

1. Орловский С.А. Проблемы принятия решения при нечеткой исходной информации. М., 1981.
2. Вопросы анализа и процедуры принятия решений / Под ред. И.Ф. Шахнова. М., 1976.
3. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А. Поспелова. М., 1986.
4. Методы принятия решений в условиях неопределенности. Рига, 1980.
5. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М., 1976.
6. Bellman K., Kalaba R., Zadeh L. // J. Math. Analysis and Appl. 1966. 13. P. 1.
7. Леман Э. Теория точечного оценивания. М., 1991.
8. Пытьев Ю.П. Методы анализа и интерпретации эксперимента. М., 1990.
9. Пытьев Ю.П. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. № 2. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1998. No. 2. P. 1).
10. Пытьев Ю.П. // Там же. № 1. С. 3 (Ibid. No. 1. P. 1).
11. Zadeh L.A. // Information and Control. 1965. 8. P. 335.
12. Пытьев Ю.П. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 6. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 6. P. 1).
13. Пытьев Ю.П. // Там же. N 4. С.3 (Ibid. No. 4. P. 1).

Поступила в редакцию
05.11.97