УДК 539.12.01

СООТНОШЕНИЕ ПОГРЕШНОСТЬ–ВОЗМУЩЕНИЕ И СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Ю. И. Воронцов

(*кафедра молекулярной физики и физических измерений*)

Исследовано соотношение между погрешностью измерения координаты и возмущением импульса. Показано, что по отношению к принятому в квантовой теории состоянию системы после измерения, соответствующему постулату редукции, это соотношение подобно соотношению неопределенностей только при начальном состоянии системы с минимальным произведением неопределенностей. Показано, что оно подобно соотношению неопределенностей при любых начальных состояниях системы только по отношению к смеси редуцированных состояний.

1. Введение

Считается, что дисперсия погрешности измерения координаты $\Delta_m^2 x$ и дисперсия возмущения импульса $\Delta_p^2 p$ связаны между собой соотношением

$$\Delta_m^2 x \Delta_p^2 p \geqslant \frac{\hbar^2}{4}, \qquad (1)$$

которое идентично по форме соотношению Гейзенберга

$$\Delta^2 x \Delta^2 p \geqslant \frac{\hbar^2}{4}. \qquad (2)$$

Соотношение (1) обычно понимается так, что в результате измерения координаты происходит увеличение неопределенности импульса тела, и после измерения дисперсия импульса на соответствующую величину больше, чем до измерения.

Ниже показано следующее.

1. При том определении понятия «состояние после измерения» (СПИ), которое принято в квантовой теории, такое утверждение ошибочно. Дисперсия импульса тела после измерения координаты может быть меньше, чем до измерения. По отношению к этому СПИ соотношение (1) справедливо только в случае, если начальным состоянием тела является состояние с минимальным произведением неопределенностей ($\Delta x \Delta p = \hbar/2$).

2. Соотношение (1) справедливо при любых начальных условиях по отношению к более общему состоянию, представляющему собой смесь возможных «состояний после измерения». Такое состояние имеет место после взаимодействия тела с прибором, но до разделения этой смеси в соответствии с результатами измерения [1–3].

В утверждении, что соотношение (1) не является столь же фундаментальным, как соотношение (2), нет никакого противоречия с основами квантовой теории. Соотношение (1) не имело строгого математического обоснования, а было получено на некоторых спекулятивных примерах измерения координаты (в учебниках обычно рассматривается измерение координаты частицы с помощью микроскопа). Не было дано четкого определения физического смысла величин $\Delta_m^2 x$ и $\Delta_p^2 p$, которое указывало бы рецепт экспериментальной проверки соотношения (1). Поэтому прежде чем анализировать соотношение (1), обсудим возможное физическое содержание понятий «погрешность измерения» и «возмущение» в рамках квантовой теории измерений.

2. Погрешность измерения и возмущение

В классической теории погрешностью измерения называют разность $(x_j - x)$ между результатом измерения x_j и истинным значением x измеряемой величины. Характеристикой прибора служит условная вероятность $P(x_j|x)$ результата x_j при заданном значении x.(Можно говорить о вероятности результата измерения, а не о плотности вероятности даже в случае наблюдаемых с непрерывным спектром собственных значений, поскольку результаты измерения всегда дискретны, хотя бы из-за конечного числа знаков.) С точки зрения квантовой теории состояние с точно заданной координатой физически нереализуемо. Но можно говорить о состоянии с «хорошо определенной» координатой, имея в виду состояние, в котором неопределенность координаты много меньше среднеквадратичной погрешности прибора. В этом приближении классическое определение погрешности измерения может быть принято и в квантовой теории измерений. (Возможен и другой путь определения условной вероятности $P(x_j|x)$ без использования собственного состояния наблюдаемой.)

Под дисперсией возмущения импульса, в соответствии с точным значением этих слов, следовало бы понимать дисперсию разности $p - p_0$, где p и p_0 — значения импульса после и до измерения координаты. В принципе непосредственное измерение этой разности возможно. Однако эта разность будет равна искомому возмущению импульса только в том случае, когда импульс является интегралом свободного движения тела. К осциллятору, например, эта разность как мера возмущения импульса не подходит. Подобный подход к определению возмущения совершенно непригоден и в случае свободного тела, если поставить задачу о возмущении координаты при измерении импульса.

Единственный общий способ экспериментального определения возмущения импульса (как и любых других наблюдаемых) — это экспериментальное определение плотности вероятности импульса (ПВ) в СПИ и сравнение ее с ПВ в начальном состоянии. Если характеризовать эти функции величинами соответствующих им дисперсий, то количественной мерой возмущения может быть разность дисперсий в СПИ ($\Delta_1^2 p$) и в начальном состоянии тела ($\Delta_0^2 p$), т. е.

$$\Delta_p^2 p \equiv \Delta_1^2 p - \Delta_0^2 p. \qquad (3)$$

Подчеркнем, что $\Delta_p^2 p$ в этом случае — не дисперсия, а разность дисперсий.

3. Состояние после измерения

Что понимать под СПИ? Согласно постулату редукции фон Неймана, система переходит в результате точного измерения наблюдаемой $\hat{A}$ в ее собственное состояние $|A_j\rangle$ [4]. В случае приближенных измерений СПИ $\hat{\rho}(A_j)$ будет зависеть от начального состояния системы (НСС) $\hat{\rho}_0$, начального состояния прибора и результата измерения A_j. СПИ представляют в следующем виде [5–7]:

$$\hat{\rho}_1(A_j) = \frac{\hat{R}(A_j)\hat{\rho}_0\hat{R}^+(A_j)}{\mathrm{Tr}(\hat{\rho}_0\hat{\Pi}(A_j))}. \qquad (4)$$

Оператор редукции $\hat{R}(A_j)$ в случае приближенных неортогональных измерений равен [6, 7]

$$\hat{R}(A_j) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(A_j|A)|A\rangle\langle A|dA,$$

а вероятностно-операторная мера

$$\hat{\Pi}(A_j) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P(A_j|A)|A\rangle\langle A|dA,$$

где $P(A_j|A)$ — условная вероятность результата измерения A_j. Модуль комплексной функции $f(A_j|A)$ удовлетворяет равенству

$$|f(A_j|A)|^2 = P(A_j|A),$$

а фаза зависит от состояния прибора [6].

Из (4), полагая $\hat{A} = \hat{x}$, найдем ПВ координаты $w_1(x|x_j) = \mathrm{Tr}(|x\rangle\langle x|\rho_1)$ в состоянии $\hat{\rho}_1(x_j)$. Она связана с априорной ПВ $w_0(x)$ и с $P(x_j|x)$ соотношением Байеса [6]

$$w_1(x|x_j) = \frac{w_0(x)P(x_j|x)}{P(x_j|\hat{\rho}_0)}, \tag{5}$$

где $P(x_j|\hat{\rho}_0) = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}_0\hat{\Pi}(x_j))$ есть вероятность результата измерения x_j при начальном состоянии тела $\hat{\rho}_0$.

4. Соотношение погрешность–возмущение на состоянии $\hat{\rho}_1(A_j)$

Исследование интересующего нас соотношения в общем виде возможно, но нагляднее основные выводы получаются из анализа примеров.

Допустим, что

$$w_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta_0 x}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\Delta_0^2 x}\right\}, \tag{6}$$

$$P(x_j|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta_m x}\exp\left\{-\frac{(x_j - x)^2}{2\Delta_m^2 x}\right\}. \tag{7}$$

Здесь $\Delta_m^2 x$ есть дисперсия погрешности прибора.

При этих условиях функция $w_1(x|x_j)$ будет гауссовской, а соответствующая дисперсия $\Delta_1^2 x$ будет удовлетворять соотношению

$$\frac{1}{\Delta_1^2 x} = \frac{1}{\Delta_m^2 x} + \frac{1}{\Delta_0^2 x}. \tag{8}$$

Допустим, что в начальном чистом состоянии

$$\Delta_0^2 p = \frac{\hbar^2}{4\Delta_0^2 x(1 - r_0^2)}, \tag{9}$$

где r_0 — коэффициент корреляции $\hat{x}$ и $\hat{p}$. Положим, что корреляция является следствием условий

$$\hat{p} = \hat{p}_0 - \gamma\hat{x}, \quad \Delta^2 p_0 = \frac{\hbar^2}{4\Delta_0^2 x}, \tag{10}$$

где γ — действительное число. В этом случае

$$r_0 = \frac{\gamma\Delta_0 x}{\Delta_0 p}, \qquad \Delta_0^2 p = \frac{\hbar^2}{4\Delta_0^2 x} + \gamma^2\Delta_0^2 x. \tag{11}$$

После измерения координаты имеет место соотношение

$$\Delta_1^2 p \geqslant \frac{\hbar^2}{4\Delta_1^2 x} + \gamma^2\Delta_1^2 x. \tag{12}$$

Из (11), (12), (8) получим

$$\Delta_p^2 p \geqslant \frac{\hbar^2}{4\Delta_m^2 x} - \gamma^2\frac{(\Delta_0^2 x)^2}{\Delta_0^2 x + \Delta_m^2 x}. \tag{13}$$

Это соотношение опровергает соотношение (1). Правая часть соотношения (13) может быть меньше $\hbar^2/(4\Delta_m^2 x)$ и может быть даже отрицательной. Уменьшение дисперсии импульса в СПИ в данном случае происходит потому, что измерение координаты дает одновременно информацию и об импульсе.

Можно показать, что отрицательное значение разности дисперсий (3) может быть и при таком НСС, при котором импульс не коррелирует с координатой. Это может быть в случае, если функция $w(x|x_j)$ существенно более гладкая, чем $w_0(x)$. Для этого НСС должно быть далеким от гауссовского.

Из соотношения (13) следует, что соотношение (1), рассматриваемое относительно состояния $\hat{\rho}_1(x_j)$, справедливо только при НСС с минимальным произведением неопределенностей ($\Delta_0 p\Delta_0 x = \hbar/2$).

5. Соотношение погрешность–возмущение на смеси состояний $\hat{\rho}_1(x_j)$

Процесс измерения представляют состоящим из двух актов [1]. Первый акт состоит в том, что исследуемая система «подвергается внешнему физически реальному, изменяющему ход событий воздействию». Состояние системы, рассматриваемой отдельно от прибора, после такого взаимодействия будет смешанным. «Второй акт измерения выбирает из бесконечно большого числа состояний смеси некоторое вполне определенное как действительно реализованное». В качестве иллюстрации обычно дается пример точного измерения наблюдаемой с дискретным спектром собственных значений. Смешанное состояние представляется в виде смеси собственных состояний $|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$ наблюдаемой с вероятностями $|\langle\varphi_n|\psi\rangle|^2$, где $|\psi\rangle$ — вектор НСС. В случае приближенных измерений координаты обсуждаемое состояние будет смесью состояний $\hat{\rho}_1(x_j)$ с вероятностями $P(x_j|\hat{\rho}_0)$:

$$\hat{\rho}_\Sigma = \sum_j P(x_j|\hat{\rho}_0)\hat{\rho}_1(x_j). \tag{14}$$

В состоянии $\hat{\rho}_\Sigma$ будет

$$w_\Sigma(p) = \sum_j P(x_j|\rho_0)w_1(p|x_j),$$

$$\begin{aligned} \langle p^2\rangle_\Sigma &= \sum_j P(x_j|\rho_0)\langle p^2(x_j)\rangle_1, \\ \langle p\rangle_\Sigma &= \sum_j P(x_j|\rho_0)\langle p(x_j)\rangle_1, \end{aligned} \tag{15}$$

где $w_\Sigma(p) = \langle p|\hat{\rho}_\Sigma|p\rangle$, $w_1(p|x_j) = \langle p|\hat{\rho}_1(x_j)|p\rangle$. Символ $\langle\rangle_1$ обозначает среднее в состоянии $\hat{\rho}_1(x_j)$.

Положив, без ограничения общности анализа, $\langle p\rangle_\Sigma = \langle p\rangle_0 = 0$, $\langle x\rangle_0 = 0$, учтя, что $\langle p^2(x_j)\rangle_1 = \langle p(x_j)\rangle_1^2 + \Delta_1^2 p$ и что $\Delta_1^2 p$ не зависит от x_j (см. (12)), получим из (10), (15)

$$\Delta_\Sigma^2 p = \Delta_1^2 p + \sum_j P(x_j|\rho_0)\gamma^2\langle x(x_j)\rangle_1^2. \tag{16}$$

При условиях (6), (7) среднее значение координаты в состоянии $\hat\rho_1(x_j)$ равно

$$\langle x(x_j)\rangle_1 = \frac{x_j\Delta_0^2 x}{\Delta_m^2 x + \Delta_0^2 x}. \tag{17}$$

Следовательно, второе слагаемое в (16) пропорционально величине $\langle x_j^2\rangle$, которая связана с дисперсией погрешности измерения и с дисперсией координаты в НСС. Вероятность $P(x_j|\hat\rho_0) = \int P(x_j|x)w_0(x)dx$ при $P(x_j|x) = P(x - x_j)$ представляет собой свертку функций, т.е. является вероятностью суммы двух независимых случайных величин. Следовательно, при условии $\langle x_j\rangle = \langle x\rangle_0 = 0$ будет

$$\langle x_j^2\rangle \equiv \sum_j x_j^2 P(x_j|\rho_0) = \Delta_m^2 x + \Delta_0^2 x. \tag{18}$$

Из (16)–(18) найдем

$$\Delta_{\Sigma p}^2 p \equiv \Delta_\Sigma^2 p - \Delta_0^2 p = \Delta_1^2 p + \frac{\gamma^2(\Delta_0^2 x)^2}{\Delta_m^2 x + \Delta_0^2 x} - \Delta_0^2 p. \tag{19}$$

Учтя соотношения (8), (11), (12), получим из (19) соотношение

$$\Delta_{\Sigma p}^2 p \geqslant \frac{\hbar^2}{4\Delta_m^2 x},$$

которое подобно соотношению (1).

Эти примеры доказывают справедливость утверждений, сформулированных во вводной части статьи.

Обобщенное соотношение погрешность–возмущение относительно смеси редуцированных состояний для любой пары наблюдаемых $\hat A$, $\hat B$ получено в работе [6]. Показано, что даже по отношению к этому смешанному состоянию соотношение погрешность–возмущение идентично по форме соответствующему соотношению неопределенностей только, если коммутатор этих наблюдаемых есть c-число.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных иссследований (грант 96-02-16391а).

Литература

1. *Гейзенберг В.* Физические принципы квантовой теории. Л.; М., 1932.
2. *Дирак П.А.М.* Принципы квантовой механики. М., 1964.
3. *Мандельштам Л.И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М., 1972.
4. *Фон Нейман И.* Математические основы квантовой механики. М., 1964.
5. *Хелстром К.* Квантовая теория проверки гипотез и оценивания. М., 1979.
6. *Воронцов Ю.И.* Теория и методы макроскопических измерений. М., 1989.
7. *Braginsky V.B., Khalili F.Ya.* Quantum Measurements. Cambridge, 1992.

Поступила в редакцию
13.10.97