УДК 530.1

ПРОИЗВОДЯЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ТОЖДЕСТВ УОРДА И АНОМАЛИЙ

Д. А. Славнов

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

В рамках размерной перенормировки по линиям, использующей только целые размерности, выведено производящее уравнение, из которого могут быть получены тождества Уорда для перенормированных функций Грина. Построен производящий функционал для аномалий и получено условие отсутствия аномалий.

В статьях автора [1, 2] был представлен вариант размерной перенормировки, в котором используются только целые и положительные размерности в пространстве импульсов. Настоящая статья посвящается вопросу, как в такой схеме могут быть получены нормальные и аномальные тождества Уорда. Предлагаемый подход во многом сходен с тем, который был развит в работах [3–5] для решения аналогичной проблемы в случае перенормировки по асимптотикам [4].

Тождества Уорда отражают свойства симметрии изучаемой модели относительно некоторых преобразований полей. Тождества устанавливают связи между различными функциями Грина. Если перенормировка сохраняет симметрию, то эти связи сохраняются для перенормированных функций Грина. В противном случае говорят, что имеют место аномалии.

В рамках рассматриваемой перенормировочной схемы функции Грина (в евклидовой метрике) задаются с помощью следующего производящего функционала [1]:

$$Z(j) = \mathcal{N}^{-1} E(\Delta) \exp\{-W(\varphi)\}\, C(j,\varphi)|_{\varphi=0}\,. \quad (1)$$

Здесь

$$E(\Delta) = \exp\{\Delta^N\} \ldots \exp\{\Delta^1\},$$

$$C(j,\varphi) = \exp\left\{ \sum_n \sum_u \int dp\, j_u^n(p) \varphi_u^n(p) \right\}.$$

Через j обозначена соответствующая совокупность токов, через $\mathcal{N}$ — нормировочный множитель, а φ обозначает всю совокупность полей, которые фигурируют в рассматриваемой модели. Эта совокупность разбита на N типов: $\varphi = \{\varphi_u^n\}$ $(n = 1, \ldots, N)$. Каждый тип может содержать несколько видов полей, которые различаются индексом u. Считается, что отличны от нуля хронологические свертки (пропагаторы) полей, принадлежащих одному и тому же типу:

$$\langle \varphi_u^n(p) \varphi_v^n(p') \rangle = i D_{uv}^n(p) \delta(p+p').$$

Операторы Δ^n $(n = 1, \ldots, N)$ выражаются через пропагаторы следующим образом:

$$\Delta^n = \frac{1}{2} \int d\mu(p) \sum_{u,v} \frac{\delta}{\delta\varphi_u^n(p)} D_{uv}^n(p) \frac{\delta}{\delta\varphi_v^n(-p)}\,. \quad (2)$$

В формуле (2) фигурирует операция перенормированного интегрирования $\int d\mu(p) \ldots$. Явный вид этой операции приведен в статьях [1, 2]. Здесь он нам не потребуется, отметим только, что

$$\int d\mu(p) = 0. \quad (3)$$

Считается, что классическое (эффективное) действие имеет структуру

$$S(\varphi) = I(\varphi) + W(\varphi),$$

где $I(\varphi)$ определяет пропагаторы и имеет вид

$$I(\varphi) = \int dp \sum_{n,u,v} \varphi_u^n(-p) D_{uv}^n(p)^{-1} \varphi_v^n(p),$$

причем

$$\sum_v D_{uv}^n(p)^{-1} D_{vt}^n(p) = \delta_{ut}.$$

Рассмотрим некоторое инфинитезимальное преобразование полей:

$$\varphi_v^n(p) \to \varphi_v^n(p) + \delta\varphi_v^n(p) = \varphi_v^n(p) + f_v^n(p,\varphi)\delta\lambda. \quad (4)$$

Это может быть, например, преобразование БРСТ [6, 7], локальное калибровочное или киральное. Преобразование (4) индуцирует преобразование действия

$$S(\varphi) \to S(\varphi) + \delta S(\varphi) = S(\varphi) + \int dp \times$$

$$\times \sum_{n,v} \left\{ 2 \sum_u \varphi_u^n(-p) D_{uv}^n(p)^{-1} + \frac{\delta W(\varphi)}{\delta\varphi_v^n(p)} \right\} \delta\varphi_v^n(p).$$

Говорят, что классическое действие частично сохраняется, если $W(\varphi)$ можно представить в виде $W = W_0 + W_1$, так что

$$\delta S_0 \equiv \int dp \sum_{n,v} \left\{ 2 \sum_u \varphi_u^n(-p) D_{uv}^n(p)^{-1} + \frac{\delta W_0(\varphi)}{\delta\varphi_v^n(p)} \right\} \delta\varphi_v^n(p) = 0. \quad (5)$$

Типичными примерами частей действия W_1, нарушающих его сохранение, являются массовые члены для киральных преобразований, члены, фиксирующие калибровку, для локальных калибровочных преобразований.

Сохранение (частичное) действия имеет своим следствием обобщенные тождества Уорда. Однако эти тождества могут оказаться нарушенными. Во-первых, нарушение может быть вызвано частью действия W_1. Это нарушение имеет классическое происхождение. Во-вторых, могут возникнуть так называемые аномалии, которые обязаны своим происхождением процессу квантования. Дело в том, что в классическом действии поля считаются достаточно хорошими, интегрируемыми функциями. Соответственно в равенстве (5) интеграл по импульсам — это обычный интеграл. В противоположность этому в процессе квантования мы от классического действия переходим к функциям Грина, в которых классические поля заменяются на пропагаторы, имеющие значительно более плохое поведение. Поэтому некоторые соотношения, справедливые для классических полей, оказываются нарушенными для пропагаторов.

Для обнаружения причин возникновения аномалий оказывается весьма удобной схема перенормировок, предложенная в статьях [1, 2]. В этой схеме производящий функционал $Z(j)$ для перенормированных функций Грина задается формулой (1), в которой, с одной стороны, фигурируют классические поля φ (в множителях $\exp\{-W(\varphi)\}$ и $C(j,\varphi)$), а с другой — имеются операторы Δ^n, которые заменяют классические поля на пропагаторы. Параллельно с этим обычные импульсные интегралы заменяются на перенормированные. Явное задание всех этих операций значительно облегчает процедуру обнаружения причин возникновения аномалий.

Приступим к этой процедуре. Начнем с рассмотрения выражения

$$\delta J = \mathcal{N}^{-1} \int d\mu(p)\, E(\Delta) \exp\{-W(\varphi)\} C(j,\varphi) \times$$

$$\times \sum_{n,u,v} 2\varphi_u^n(-p) D_{uv}^n(p)^{-1} f_v^n(p;\varphi)\bigg|_{\varphi=0} \delta\lambda. \quad (6)$$

Так как в правой части (6) после всех выкладок следует положить $\varphi = 0$, то одна из вариационных производных, содержащаяся в некотором из операторов Δ^n, должна подействовать на явно выписанное поле $\varphi_u^n(-p)$. При этом множитель D_{uv}^n, фигурирующий в этом операторе Δ^n, будет компенсирован множителем $D_{uv}^n(p)^{-1}$. Остальные операторы Δ^n снова можно будет собрать в экспоненту. В результате правая часть (6) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\delta J \ &= \ \mathcal{N}^{-1} \int d\mu(p)\, E(\Delta) \exp\{-W(\varphi)\} \times \\ &\times \sum_{n,v} \left[-C(j,\varphi) \frac{\delta W(\varphi)}{\delta\varphi_v^n(p)} f_v^n(p;\varphi) + \right. \\ &\left. + \frac{\delta}{\delta\varphi_v^n(p)} \left(C(j,\varphi) f_v^n(p;\varphi) \right) \right] \bigg|_{\varphi=0} \delta\lambda.\end{aligned}$$

Ограничимся случаем, когда $f(x;\varphi)$ локально выражается через $\varphi_v^n(x)$. Тогда $\delta f(p;\varphi)/\delta\varphi_v^n(p)$ не зависит от p и в силу (3)

$$\int d\mu(p)\, \delta f(p;\varphi)/\delta\varphi_v^n(p) = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\delta J \ = \ &\mathcal{N}^{-1} \int d\mu(p)\, E(\Delta) \exp\{-W(\varphi)\} C(j,\varphi) \times \quad (7) \\ &\times \sum_{n,v} \left[-\frac{\delta W(\varphi)}{\delta\varphi_v^n(p)} + j_v^n(p) \right] f_v^n(p;\varphi) \bigg|_{\varphi=0} \delta\lambda.\end{aligned}$$

Сравнивая (6) и (7), получаем

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}^{-1} \int d\mu(p)\, E(\Delta) \exp\{-W(\varphi)\} C(j,\varphi) \times \quad (8) \\ &\times \sum_{n,v} \left[-\frac{\delta W_1(\varphi)}{\delta\varphi_v^n(p)} + j_v^n(p) \right] f_v^n(p;\varphi) \bigg|_{\varphi=0} \delta\lambda = R,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}R = \ &\mathcal{N}^{-1} \int d\mu(p)\, E(\Delta) \exp[-W(\varphi)] C(j,\varphi) \times \\ &\times \left\{ \sum_{n,v} \left[2 \sum_u \varphi_u^n(-p) D_{uv}^n(p)^{-1} + \right.\right. \quad (9) \\ &\left.\left. + \frac{\delta W_0(\varphi)}{\delta\varphi_v^n(p)} \right] f_v^n(p;\varphi) \right\} \bigg|_{\varphi=0} \delta\lambda.\end{aligned}$$

В том случае, когда $R = 0$, соотношение (8) превращается в тождество Уорда, точнее в производящее уравнение

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}^{-1} \int d\mu(p)\, E(\Delta) \exp\{-W(\varphi)\} C(j,\varphi) \times \quad (10) \\ &\times \sum_{n,v} j_v^n(p) f_v^n(p;\varphi) \bigg|_{\varphi=0} \delta\lambda = \\ &= \mathcal{N}^{-1} \int d\mu(p)\, E(\Delta) \exp\{-W(\varphi)\} C(j,\varphi) \times \\ &\times \sum_{n,v} \frac{\delta W_1(\varphi)}{\delta\varphi_v^n(p)} f_v^n(p;\varphi) \bigg|_{\varphi=0} \delta\lambda,\end{aligned}$$

из которого различные тождества Уорда могут быть получены варьированием по токам j.

Всегда можно считать, что токи $j_v^n(p)$ являются гладкими, достаточно быстро убывающими функциями p, поэтому (см. [1]) в левой части равенства (10) перенормированный интеграл допустимо заменить на обычный и переписать эту часть в виде

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}^{-1} \int dp\, E(\Delta) \sum_{n,v} j_v^n(p) f_v^n(p; \frac{\delta}{\delta j}) \times \\ &\times \exp\{-W(\varphi)\} C(j,\varphi) \bigg|_{\varphi=0} \delta\lambda = \\ &= \int dp \sum_{n,v} j_v^n(p) f_v^n(p; \frac{\delta}{\delta j}) Z(j) \delta\lambda.\end{aligned}$$

В результате при $R = 0$ и $W_1 = 0$ производящее уравнение для тождеств Уорда приобретает стандартный вид

$$\int dp \sum_{n,v} j_v^n(p) f_v^n(p; \frac{\delta}{\delta j}) Z(j) \delta\lambda = 0.$$

Вернемся теперь к формуле (9) для R. Стоящее в ее правой части выражение в фигурных скобках совпадает с подынтегральным выражением в формуле (5). Однако, в отличие от формулы (5), в формуле (9) это выражение подвергается воздействию операторов Δ^n, которые заменяют фигурирующие в нем поля φ на пропагаторы. Соответственно в формуле (9) мы вынуждены вместо обычных интегрирований использовать перенормированные. Для последних выполняются не все соотношения, которые справедливы для обычных интегрирований. В первую очередь это связано с тем, что в перенормированном интегрировании помимо четырех физических размерностей импульсного пространства фигурируют дополнительные нефизические размерности.

Таким образом, равенство (5), описывающее инвариантность классического действия, оказывается недостаточным условием справедливости тождеств Уорда для перенормированных функций Грина. Условием выполнения этих тождеств оказывается более сильное требование: $R = 0$. Отличие R от нуля говорит о том, что тождества Уорда нарушаются аномалиями. Вместе с тем все аномалии определяются величиной R, для которой имеется замкнутое выражение. Фактически R является производящим функционалом для аномалий. Поэтому предложенная в работах [1, 2] перенормировочная схема оказывается очень удобной для получения тождеств Уорда и для выявления возможных аномалий.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-00726).

Литература

1. *Славнов Д.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. № 1. С. 15 (Moscow University Phys. Bull. 1998. No. 1).
2. *Славнов Д.А.* // Там же. № 2. С. 15 (Ibid. No. 2).
3. *Il'in V.A., Slavnov D.A.* Preprint IHEP 83-80. Serpukhov, IHEP, 1983.
4. *Славнов Д.А.* // ТМФ. 1985. **62**. С. 335.
5. *Селихов А.В., Славнов Д.А.* // ТМФ. 1986. **67**. С.186.
6. *Becchi C., Rouet A., Stora R.* // Comm. Math. Phys. 1975. **42**. P.127.
7. *Тютин И.В.* Препринт ФИАН № 39, М., 1975.

Поступила в редакцию
17.10.97