

выражение. Фактически R является производящим функционалом для аномалий. Поэтому предложенная в работах [1, 2] перенормировочная схема оказывается очень удобной для получения тождеств Уорда и для выявления возможных аномалий.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-00726).

Литература

1. Славнов Д.А. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. № 1. С. 15 (Moscow University Phys. Bull. 1998. No. 1).

2. Славнов Д.А. // Там же. № 2. С. 15 (Ibid. No. 2).
3. P'in V.A., Slavnov D.A. Preprint ИИЭП 83-80. Serpukhov, ИИЭП, 1983.
4. Славнов Д.А. // ТМФ. 1985. 62. С. 335.
5. Селихов А.В., Славнов Д.А. // ТМФ. 1986. 67. С.186.
6. Vecchi C., Rouet A., Stora R. // Comm. Math. Phys. 1975. 42. P.127.
7. Тютин И.В. Препринт ФИАН № 39, М., 1975.

Поступила в редакцию
17.10.97

УДК 621.385.6

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ЛОВУШКЕ

А. И. Торопова

(кафедра квантовой радиофизики)

Предложен вариант ловушки, в которой частицы движутся в однородном постоянном магнитном поле и электростатическом поле, создаваемом двумя эквипотенциальными плоскостями и аксиальной поверхностью вращения. Найдено решение канонических уравнений. Показано, что взаимодействие электронов с полем излучения приводит к подавлению параметрического резонанса. Исследована модель ловушки, учитывающая конечную проводимость стенок резонатора и потери при столкновениях с газом.

Локализация заряженных и нейтральных частиц в неоднородных переменных электромагнитных полях позволяет создать уникальные условия для проведения сверхточных экспериментов в атомной и ядерной физике. Наибольшее распространение получили электромагнитная ловушка Пеннинга и радиочастотный волновод Пауля [1, 2].

В настоящей работе рассмотрен вариант ловушки, представляющей собой помещенные в однородное постоянное магнитное поле две эквипотенциальные плоскости и аксиальную поверхность вращения, к которым приложена разность потенциалов. Ловушка является открытым резонатором, в котором в результате взаимодействия электронов с внешним полем возникает спонтанное и индуцированное излучение, происходит перераспределение энергии между электронами и полем излучения, изменяется пространственная конфигурация распределения электронов. В рамках гамильтонова формализма рассмотрена эволюция системы электроны-поле при параметрической накачке внешним генератором на одной из комбинационных частот финитного движения электронов. Получено решение канонических уравнений в терминах эллиптических функций. Найдены энергия поля излучения и границы области распределения электронов. Показано, что взаимодействие электронов с полем излучения приводит к подавлению параметрического резонанса. Исследована реалистичная модель ловушки, учитывающая конечную прово-

димость стенок резонатора и потери при столкновениях с газом. Показано, что в этом случае энергия поля стремится к постоянной величине.

Электромагнитное поле аксиального квадруполья

Рассмотрим электродинамическую систему, в которой потенциал электростатического поля

$$\Phi(r, \varphi, z) = C_0 I_0(kr) \cos(kz) / I_0(kr_0) \quad (1)$$

создается двумя плоскостями: $z = -l/2$ и $z = l/2$ с потенциалами, равными нулю, и поверхностью вращения $I_0(kr_0) = I_0(kr) \cos(kz)$ с потенциалом C_0 [3]. Здесь $I_0(u)$ — функция Бесселя мнимого аргумента, $k = \pi/l$ [4]. Система находится в однородном постоянном магнитном поле с индукцией $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. В окрестности начала координат $kr \ll 1$, $kz \ll 1$ потенциал

$$\Phi(r, \varphi, z) \approx V_0 [1 + (r^2 - 2z^2) / 2R^2], \quad (2)$$

$V_0 = C_0 / I_0(kr_0)$, $R^2 = 2/k^2$ соответствует конфигурации поля ловушки Пеннинга [1].

Область пространства, ограниченная металлическими поверхностями, представляет собой открытый резонатор, в котором можно возбудить стоячие волны. Решение однородных уравнений Максвелла представим в потенциалах A_0 и \mathbf{A} :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla A_0, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (3)$$

Переменные разделяются в криволинейных ортогональных координатах, для которых координатные поверхности совпадают с поверхностями электродов. В этом случае поперечно-магнитная (*ТМ*-волна) или электрическая волна резонатора определяется вектором Герца $\mathbf{G} = (0, 0, G)$, удовлетворяющим условию Лоренца:

$$A_0 = \operatorname{div} \mathbf{G}, \quad \mathbf{A} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t}.$$

Функция G удовлетворяет волновому уравнению, решение которого будем искать в виде $G \sim \operatorname{Re}[g \times \exp(-i\omega t)]$. Функция g подчиняется уравнению Гельмгольца $\Delta g + (\omega^2/c^2)g = 0$, частное решение которого $g_n = I_0(\chi r) \sin(k_n z)/\chi$, $\omega^2/c^2 = k_n^2 - \chi^2$, $k_n = (2n+1)\pi/l$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Далее ограничимся радиочастотным диапазоном, для которого $\omega/c \ll k_0$, или длина волны $\lambda \gg 2l$. Это условие позволяет использовать одномодовое приближение $g = k^{-1} I_0(kr) \sin(kz)$, $k = \pi/l$, соответствующее решению уравнения Лапласа $\Delta g = 0$ [5]. Из (3) следует, что с точностью до величины $\sim (\omega/kc)^2$ тангенциальные компоненты вектора \mathbf{E} на поверхности аксиального электрода $I_0(kr_0) = I_0(kr) \cos(kz)$ равны нулю.

В рассматриваемом одномодовом приближении общее решение однородных уравнений Максвелла представим в виде

$$A_r = A_\varphi = 0,$$

$$A_0 = c(\varepsilon_0 \omega L)^{-1/2} [a A_0^{(e)}(r, \varphi, z) \exp(-i\omega t) + \text{к.с.}],$$

$$A_z = c(\varepsilon_0 \omega L)^{-1/2} [a A_z^{(e)}(r, \varphi, z) \exp(-i\omega t) + \text{к.с.}]. \quad (4)$$

Здесь $A_0^{(e)}(r, \varphi, z) = \partial g / \partial z$, $\mathbf{A}^{(e)} = (0, 0, i\omega g/c^2)$. Постоянная L , представляющая собой эффективный объем резонатора, определяется из условия

$$\int d^3x \left\langle \frac{\varepsilon_0(E^2 + c^2 B^2)}{2} \right\rangle = \omega a a^*,$$

где угловые скобки обозначают усреднение по времени, область интегрирования ограничена объемом резонатора.

Гамильтонова форма уравнений движения и поля

Рассмотрим движение N электронов, взаимодействующих с внешним электромагнитным полем, задаваемым потенциалами

$$A_0^{(ext)}(t, \mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) + A_0^{(e)}(t, \mathbf{x}), \quad A_0^{(e)}(t, \mathbf{x}) = V \frac{\partial G}{\partial z},$$

$$\mathbf{A}^{(ext)}(t, \mathbf{x}) = (B/2)(-y, x, 0) + \mathbf{A}^{(e)}(t, \mathbf{x}),$$

$$\mathbf{A}^{(e)}(t, \mathbf{x}) = (0, 0, -c^{-2} V \frac{\partial G}{\partial t}),$$

где $G = g \cos \omega t$, $g = (1/k) I_0(kr) \sin(kz)$, и свободным полем, потенциалы которого будем искать в виде (4), предполагая, что коэффициенты a , a^* зависят от времени. Гамильтониан, описывающий эволюцию системы N электронов и поля,

$$H = \sum_{a=1}^N \frac{1}{2m} [\mathbf{p}_a + e_0 \mathbf{A}^{(ext)}(t, \mathbf{x}_a) + e_0 \mathbf{A}(t, \mathbf{x}_a)]^2 - e_0 [A_0^{(ext)}(t, \mathbf{x}_a) + A_0(t, \mathbf{x}_a)]. \quad (5)$$

Канонические переменные a , ia^* играют роль координат и импульсов [6], фундаментальные скобки Пуассона (СП) $[a, ia^*] = 1$. Каноническое преобразование $a = I^{1/2} \exp(-i\phi)$ позволяет перейти в (5) к действительным координате ϕ и импульсу I с фундаментальной СП $[\phi, I] = 1$. Энергия поля излучения будет иметь вид $\varepsilon(t) = \omega I(t)$.

Гамильтониан H представим в виде $H = H_0 + h$, где

$$H_0 = \sum_{a=1}^N \frac{1}{2m} [\mathbf{p}_a + e_0 \mathbf{A}^{(ext)}(\mathbf{x}_a)]^2 - e_0 \Phi(\mathbf{x}_a),$$

$$h = \sum_{a=1}^N -e_0 [A_0^{(e)}(t, \mathbf{x}_a) + A_0(t, \mathbf{x}_a) + \mathbf{v}_a \mathbf{A}^{(e)}(t, \mathbf{x}_a) + \mathbf{v}_a \mathbf{A}(t, \mathbf{x}_a)] + \frac{e_0^2}{2m} [\mathbf{A}^{(e)}(t, \mathbf{x}_a) + \mathbf{A}(t, \mathbf{x}_a)]^2, \quad (6)$$

$$m \mathbf{v}_a = \mathbf{p}_a + e_0 \mathbf{A}^{(ext)}(\mathbf{x}_a).$$

Запишем гамильтониан H в парааксиальном приближении (2). Если пренебречь взаимодействием с полем излучения, то функции $x(t)$, $y(t)$ будут представлять собой параметрические уравнения эпициклоиды с характерными частотами $\omega_{1,2} = (\Omega \pm \omega_{12})/2$, $\omega_{12} = [\Omega^2 - 2\omega_3^2]^{1/2}$, $\Omega = e_0 B/m$, $\omega_3^2 = 2e_0 V_0/(mR^2)$, а функция $z(t)$ будет осциллировать с частотой ω_3 . В работе [6] показано, что каноническое преобразование (КП) к новым координатам α_n и импульсам i_n с фундаментальной СП $[\alpha_n, i_k] = \delta_{nk}$:

$$x = \left(\frac{2}{m\omega_{12}} \right)^{1/2} [\sqrt{i_1} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \sqrt{i_2} \cos(\omega_2 t - \alpha_2)],$$

$$y = \left(\frac{2}{m\omega_{12}} \right)^{1/2} [\sqrt{i_1} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \sqrt{i_2} \sin(\omega_2 t - \alpha_2)],$$

$$p_x = - \left(\frac{m\omega_{12}}{2} \right)^{1/2} [\sqrt{i_1} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - \sqrt{i_2} \sin(\omega_2 t - \alpha_2)],$$

$$p_y = \left(\frac{m\omega_{12}}{2} \right)^{1/2} [\sqrt{i_1} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) - \sqrt{i_2} \cos(\omega_2 t - \alpha_2)],$$

$$z = \left(\frac{2i_3}{m\omega_3} \right)^{1/2} \cos(\omega_3 t + \alpha_3),$$

$$p_z = - (2m\omega_3 i_3)^{1/2} \sin(\omega_3 t + \alpha_3), \quad (7)$$

позволяет исключить вклад H_0 в полный гамильтониан H . В результате КП новый гамильтониан представляет собой функцию (6), в которой следует произвести замену переменных (7).

Энергия излучения генератора

Рассмотрим вначале излучение электронов в идеальном резонаторе. Найдем энергию поля в случае $\omega \approx \omega_{12} \neq 2\omega_3$, $\omega_{12} \ll c\pi/l$, используя метод усреднения в гамильтоновой форме [6]. Вычисляя среднее значение h , получим в первом приближении метода гамильтониан $h_{av} = \langle h \rangle$,

$$h_{av} = -\sigma \sum_{a=1}^N (i_{1a} i_{2a})^{1/2} (2I)^{1/2} \cos(\delta t + \phi - \alpha_{1a} - \alpha_{2a}) - \theta \sum_{a=1}^N (i_{1a} i_{2a})^{1/2} \cos(\delta t - \alpha_{1a} - \alpha_{2a}), \quad (8)$$

$$\sigma = \frac{2e_0 c}{m\omega_{12} R^2 (2\varepsilon_0 \omega L)^{1/2}},$$

$$\theta = \frac{e_0 V}{m\omega_{12} R^2}, \quad \delta = \omega - \omega_{12},$$

описывающий систему с $(2N+1)$ степенями свободы.

Для исключения явной зависимости гамильтониана от времени произведем КП $\alpha_n = \phi_n + \delta t/2$, $i_n = I_n$, ($n = 1, 2$), порождаемое производящей функцией, зависящей от старых координат и новых импульсов:

$$F_2 = \sum_{a=1}^N [\alpha_{1a} I_{1a} + \alpha_{2a} I_{2a} - \delta t (I_{1a} + I_{2a})/2].$$

Новый гамильтониан

$$h_c = -\sigma(uq + vp) - \theta u - \delta w. \quad (9)$$

Здесь в качестве полевых координаты q и импульса p введены действительная и мнимая части комплексной амплитуды a :

$$(2I)^{1/2} \cos \phi = q, \quad (2I)^{1/2} \sin \phi = -p, \quad I = \frac{1}{2}(q^2 + p^2),$$

и коллективные переменные

$$u = \sum_{a=1}^N (I_{1a} I_{2a})^{1/2} \cos(\phi_{1a} + \phi_{2a}),$$

$$v = -\sum_{a=1}^N (I_{1a} I_{2a})^{1/2} \sin(\phi_{1a} + \phi_{2a}),$$

$$2w = \sum_{a=1}^N (I_{1a} + I_{2a}),$$

характеризующие пространственную конфигурацию

электронов. «Радиус» распределения системы электронов относительно оси z

$$\rho^2(t) = \sum_{a=1}^N \frac{1}{N} (x_a^2 + y_a^2) = \frac{4}{Nm\omega_{12}} [w + (u \cos \omega t + v \sin \omega t)].$$

Очевидно, значения $\rho(t)$ ограничены кольцом $\rho_1 \leq \rho(t) \leq \rho_2$, где $(\rho^2)_{2,1} = 4[w \pm (u^2 + v^2)^{1/2}]/(Nm\omega_{12})$. Среднее значение кинетической энергии электронов $\langle K \rangle = K_{xy} + K_z$, где

$$K_{xy} = [(\Omega^2 + \omega_{12}^2)w + \Omega\omega_{12}r]/(2\omega_{12}),$$

$$K_z = (\omega_3/2) \sum_{a=1}^N I_{3a}, \quad r = \sum_{a=1}^N (I_{1a} - I_{2a}), \quad (10)$$

r , K_z — постоянные величины. Выберем начальные условия в виде $q(0) = p(0) = 0$, $u_0 = u(0)$, $v_0 = v(0)$, $w_0 = w(0)$. Для полной интегрируемости канонической системы уравнений перейдем в (9) к новым переменным $P = p$, $Q = q + Q_0$, $Q_0 = \theta/\sigma$. Тогда получим гамильтониан

$$h_N = -\sigma(uQ + vp) - \delta w. \quad (11)$$

Отметим, что в квантовой теории гамильтониан (11) описывает взаимодействие двухуровневого атома с одной модой поля резонатора [7, 8]. Величина $J = (Q^2 + p^2)/2$ представляет собой полную энергию поля, связанную с энергией поля излучения $\varepsilon(t) = \omega I(t)$ соотношением

$$I = J - 2(J_0 J)^{1/2} \cos \Phi + J_0, \quad J_0 = \frac{1}{2} Q_0^2, \quad (12)$$

$$(2J)^{1/2} \cos \Phi = Q, \quad (2J)^{1/2} \sin \Phi = -p.$$

Учитывая значения СП $[u, v] = w$, $[u, w] = v$, $[v, w] = -u$, $[Q, p] = 1$, получим систему канонических уравнений

$$\frac{du}{dt} = -\sigma w p - \delta v, \quad \frac{dv}{dt} = \sigma w Q + \delta u, \quad \frac{dw}{dt} = \sigma(vQ - up), \quad (13)$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\sigma v, \quad \frac{dp}{dt} = \sigma u. \quad (14)$$

Первые интегралы системы (13), (14)

$$w + J = E_0, \quad E_0 = w_0 + J_0, \quad (15)$$

$$w^2 - (u^2 + v^2) = S_0,$$

$$S_0 = w_0^2 - d^2, \quad d^2 = u_0^2 + v_0^2,$$

аналогичны соотношениям Менли–Роу в теории трехволновых взаимодействий [9]. Очевидно, на траекториях системы сохраняется гамильтониан (11):

$$-\sigma(uQ + vp) - \delta w = C, \quad C = -\sigma u_0 Q_0 - \delta w_0. \quad (16)$$

Теперь система нелинейных уравнений (13), (14) допускает полное интегрирование. Действительно, учитывая (15), (16), правую часть уравнения $dw/dt = \sigma(vQ - up)$ можно представить в виде функции, зависящей от w :

$$\begin{aligned} & \sigma^2(vQ - up)^2 = \\ & = 2\sigma^2(E_0 - w)(w^2 - S_0) - (C + \delta w)^2 \equiv -2F(w). \end{aligned}$$

В результате получим уравнение

$$\frac{dw}{dt} = [-2F(w)]^{1/2}, \quad (17)$$

где $F(w) = \sigma^2[(w - E_0)(w^2 - S_0) + (C + \delta w)^2/2]$.

Возможны три характерные ситуации.

А. Рассмотрим вначале отклик системы на переменное поле, пренебрегая взаимодействием электронов с электромагнитным полем резонатора. Учитывая значения первых интегралов: $C = -\delta w_0 - \delta\theta u_0$, $E_0 = w_0 + (\theta/\sigma)^2/2$ и полагая $\sigma = 0$, находим $F(w) = F_0(w)$, $F_0(w) = (\delta^2 - \theta^2)w^2/2 + C\delta w + (C^2 + \theta^2 S_0)/2$. Область определения функции $w(t)$ удовлетворяет условиям $F(w) \leq 0$, $w > 0$.

Дифференцируя (17), получим линейное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = -\frac{dF}{dw}, \quad \frac{d^2 w}{dt^2} + (\delta^2 - \theta^2)w = -C\delta,$$

из которого следует, что при $\theta^2 > \delta^2$ реализуется явление параметрического резонанса: $w(t) = C\delta/n^2 + (w_0 - C\delta/n^2) \text{ch}(nt)$, $n^2 = \theta^2 - \delta^2$. Согласно (10), кинетическая энергия поперечного движения электронов K_{xy} при $t \gg 1/n$ экспоненциально возрастает. Далее мы покажем, что взаимодействие электронов с полем излучения приводит к подавлению параметрического резонанса.

Б. В общем случае представим функцию $F(w)$ в виде $F(w) = \sigma^2(w - w_0)(w^2 - S_0) + F_0(w)$. Отметим, что при $\delta = 0$ имеем $F(0) = \sigma^2 w_0 S_0 + \theta^2(w_0^2 - v_0^2)/2 > 0$, $F(w_0) = -\theta^2 v_0^2/2$. Функция $F(w)$ обращается в нуль в трех точках: $w = s_1$, $w = s_2$, $w = s_3$. При значениях $\theta^2 < \delta^2$ имеем $0 < s_1 < s_2$, $s_3 < 0$: область значений функции $w(t)$ ограничена интервалом $s_1 \leq w \leq s_2$. В случае, соответствующем параметрическому резонансу, $\theta^2 > \delta^2$, имеем $0 < s_2 < s_1$, $s_3 < 0$. Следовательно, допустимые значения $w(t)$ в этом случае ограничены неравенством $s_2 \leq w \leq s_1$. При $\sigma^2 w_0 \ll \theta^2$ величина $s_1 \approx n^2/(2\sigma^2) - 2C\delta/n^2 + w_0$.

Обращая интеграл (17), получим в интервале $s_2 \leq w \leq s_1$ решение

$$w = s_3 + (s_2 - s_3) \text{nd}^2 \left[\frac{\Omega_0}{2}(t + t_0), \xi \right],$$

$$\Omega_0 = \sigma[2(s_1 - s_3)]^{1/2}, \quad \xi = \left[\frac{(s_1 - s_2)}{(s_1 - s_3)} \right]^{1/2},$$

где $(s_2 - s_3) \text{nd}^2 [\frac{\Omega_0}{2}t_0, \xi] = w_0 - s_3$, $\text{nd} = \text{dn}^{-1}(\frac{\Omega_0}{2}t, \xi)$, $\text{dn}(\frac{\Omega_0}{2}t, \xi)$ — эллиптическая функция Якоби [10–11]. Следовательно, $J(t) = E_0 - w(t)$ — периодическая функция с периодом $2K/\Omega_0$, где $K(\xi)$ — полный эллиптический интеграл. Энергия электромагнитного поля определяется из соотношения (12), в котором величина $J = E_0 - w$, а функция Φ находится из уравнения

$$\frac{d\Phi}{dt} = [\Phi, h_N], \quad \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\delta}{2} - \frac{\delta J_0 - \theta u_0}{2(w - w_0 - J_0)}.$$

В. Найдем решение уравнения (17), полагая $\theta = 0$: переменное электрическое поле выключено. Функция $F(w)$ обращается в нуль в точках $s_2 = w_0$,

$$s_{1,3} = -\frac{\delta}{4\sigma^2} \pm \left[\left(\frac{w_0 + \delta^2}{4\sigma^2} \right)^2 - d^2 \right]^{1/2}.$$

В этом случае $F(w) < 0$ в области $s_1 < w < w_0$. Решение уравнения (17)

$$w(t) = w_0 - (w_0 - s_1) \text{sn}^2 \left(\frac{\Omega_d t}{2}, \xi \right),$$

где $\Omega_d = \sigma[2(w_0 - s_3)]^{1/2}$, $\xi = [(w_0 - s_1)/(w_0 - s_3)]^{1/2} = (w_0 - s_1)/d$. Энергия излучения $I = w_0 - w$ представляет собой периодическую функцию с частотой биений $\pi\Omega_d/2K$, фаза поля $\phi(t) = -\delta t/2$.

При увеличении параметра θ корни уравнения $F(w) = 0$ смещаются по оси w . Если $\delta = 0$, то в области $\theta^2 \ll \sigma^2 w_0$ получим значения корней: $w_{1,3} \approx \pm S_0^{1/2} + (1 \pm w_0/S_0^{1/2})(\theta^2/4\sigma^2) + \varepsilon_{1,3}$, $\varepsilon_1 = -(\theta v_0/\sigma d)^2/2$, $\varepsilon_3 = (\theta v_0/2\sigma w_0)^2/2$, $w_2 \approx w_0 + (\theta v_0/\sigma w_0)^2/2$. При значении $\theta = \theta_c$, $\theta_c^2 = (\sigma^2 d^2/w_0)[1 - (v_0/d)^2 - (v_0/w_0)^2]^{-1/2}$ корни w_1 и w_2 совпадают. В области $\theta > \theta_c$ имеем $w_1 > w_2$.

Учет джоулевых потерь и столкновений

Для анализа поведения системы, близкой к реальной, введем в канонические уравнения феноменологические слагаемые с коэффициентами γ и μ , учитывающие рассеяние энергии, обусловленное джоулевыми потерями в стенках резонатора и столкновениями с газом. Система уравнений, порожаемая гамильтонианом (9), приобретает вид

$$\frac{du}{dt} = -\sigma wp - \delta v - 2\mu u, \quad \frac{dv}{dt} = \sigma wq + \theta w + \delta u - 2\mu v, \quad (18)$$

$$\frac{dw}{dt} = \sigma(vq - up) + \theta v - 2\mu w, \quad (19)$$

$$\frac{dq}{dt} = -\sigma v - \gamma q, \quad \frac{dp}{dt} = \sigma u - \gamma p. \quad (20)$$

При $\sigma = 0$ параметрический резонанс реализуется при условии $n_1 > 0$, $n_1 = n - 2\mu$, $n = [\theta^2 - \sigma^2]^{1/2}$.

Из (18)–(19) находим, что функция $S = w^2 - (u^2 + v^2)$ удовлетворяет уравнению $dS/dt = -4\mu S$. Отсюда следует важный вывод: при значениях $t \gg \tau$,

$\tau = 1/4\mu$, выполняется соотношение $u^2 + v^2 \approx w^2$, характеризующее самоорганизацию системы электроны–поле. Рассмотрим два характерных режима генерации.

А. Пусть $\gamma \gg \mu$. Тогда при $t > 1/\gamma$ можно применить процедуру адиабатического исключения быстрых переменных q и p , полагая $dq/dt = 0$, $dp/dt = 0$ [12]. Из (20) находим $q = -\sigma v/\gamma$, $p = \sigma u/\gamma$. Переменные u , v , w играют роль параметров порядка, управляя подсистемой электромагнитного поля. Теперь имеем систему трех уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{\sigma^2}{\gamma}uw - \delta v - 2\mu u, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\sigma^2}{\gamma}vw + \theta w + \delta u - 2\mu v, \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{\sigma^2}{\gamma}(u^2 + v^2) + \theta v - 2\mu w. \end{aligned} \quad (21)$$

Исследуем устойчивость системы (21) в линейном приближении при $n > 2\mu$. В этом случае точка $u = 0$, $v = w = \gamma(\theta - 2\mu)/\sigma^2$, представляет собой устойчивый узел. Энергия поля в резонаторе $\varepsilon = \omega\sigma^2(u^2 + v^2)/(2\gamma^2)$. При $t \gg 1/\mu$ имеем $\varepsilon \rightarrow \omega(\theta - 2\mu)^2/(2\sigma^2)$, фаза поля $\phi \rightarrow \pi$.

Б. Пусть $\mu \gg \gamma$. В теории одномодового лазера это условие позволяет адиабатически исключить устойчивые моды подсистемы атомов и выделить слабозатухающую, виртуально неустойчивую полевою моду, описывающую фазовый переход второго рода [12]. Однако в отличие от случая лазера полевая

мода в уравнениях (18)–(20) не проявляет порогового поведения. При $n > 2\mu$ существует нетривиальная особая точка с координатами $u = 0$, $v = w = \gamma n_1/\sigma^2$, $q = -n_1/\sigma$, $p = 0$, представляющая собой устойчивый узел.

Автор благодарит Ю.Г.Павленко за многочисленные замечания и советы. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-01-00957).

Литература

1. Демельт Х. // УФН. 1990. **160**, № 12. С. 129.
2. Пауль В. // Там же. С. 109.
3. Шимони К. Теоретическая электротехника. М., 1964.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., 1966.
5. Катца П.Л. // Электроника больших мощностей. Т. 1. М., 1962. С. 30.
6. Павленко Ю.Г. Гамильтоновы методы в электродинамике и квантовой механике. М., 1985.
7. Cummings F.W. // Phys. Rev. 1965. **140**. P. 1051.
8. Бетеров И.М., Лернер П.Б. // УФН. 1990. **159**, № 4. С. 665.
9. Рабинович М.И., Трубецкой Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М., 1992.
10. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М., 1968.
11. Джеффрис Г., Свирле Б. Методы математической физики. Вып. 3. М., 1970. С. 313.
12. Хакен Г. Синергетика. М., 1980.

Поступила в редакцию
17.11.97