КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.9

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ НЕПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ

Г. Н. Медведев, Б. И. Моргунов

(*кафедра математики*)

Рассматриваются электромагнитные процессы в непроводящих изотропных неоднородных средах. Характеристики среды существенно изменяются в нескольких направлениях. Для определения электрического и магнитного полей используется асимптотическая методика.

Запишем исходные уравнения макроскопической электродинамики в предположении, что свободные электрические заряды отсутствуют [1]:

$$\varepsilon_{ijk}\frac{\partial H_k}{\partial x_j} = \frac{1}{c}\frac{\partial D_i}{\partial t}, \quad \varepsilon_{ijk}\frac{\partial E_k}{\partial x_j} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_i}{\partial t},$$
$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial B_i}{\partial x_i} = 0, \tag{1}$$
$$D_i = \varkappa(\xi)E_i, \quad B_i = \mu(\xi)H_i.$$

В (1) H_k, B_k и E_k, D_k — компоненты напряженности и индукции соответственно магнитного и электрического полей, ε_{ijk} — тензор Леви–Чивита. С направлениями изменения коэффициента диэлектрической проницаемости $\varkappa$ и коэффициента магнитной проницаемости μ связываются оси x_i декартовой прямоугольной системы координат. Существенная зависимость $\varkappa$ и μ от координат учитывается введением «быстрых» переменных [2]: пусть $\varkappa = \varkappa(\xi), \mu = \mu(\xi)$, где $\xi_\alpha = x_\alpha/\varepsilon$, $\alpha = \overline{1, A}$, $A = 2$ или 3, $0 < \varepsilon \ll 1$ — некоторый безразмерный малый параметр.

Функции $\varkappa(\xi)$ и $\mu(\xi)$ имеют следующую структуру: $\varkappa(\xi) = \varkappa_0 + \varkappa_1(\xi)$, $\mu_0 + \mu_1(\xi)$, где $\varkappa_0 = \mathrm{const}$, $\mu_0 = \mathrm{const}$, функции $\varkappa_1(\xi)$, $\mu_1(\xi)$ отличны от нуля в некоторой части характерной области среды (например, ячейки периодичности). Подобные свойства среды часто встречаются в практических задачах. Так, при $A = 2$ коэффициенты $\varkappa$ и μ имеют указанную структуру для цилиндров и труб, изготовленных путем многослойной намотки однородной нити при условии, что расстояния между витками и между слоями меньше толщины нити. При $A = 3$ коэффициенты $\varkappa$ и μ обладают указанными свойствами в случае мелкодискретного композитного материала, где размеры зерен меньше расстояния между зернами.

Функции H_k,E_k, входящие в (1), ищутся в виде следующих разложений по степеням малого параметра ε [2, 3]:

для $A = 2$

$$\begin{aligned} H_\alpha(x,\xi,t,\varepsilon) &= H^0_\alpha(x,\xi,t) + \varepsilon H^1_\alpha(x,\xi,t) + \ldots, \\ H_3(x,\xi,t,\varepsilon) &= \overline{H}^0_3(x,t) + \varepsilon H^1_3(x,\xi,t) + \ldots, \\ E_\alpha(x,\xi,t,\varepsilon) &= E^0_\alpha(x,\xi,t) + \varepsilon E^1_\alpha(x,\xi,t) + \ldots, \\ E_3(x,\xi,t,\varepsilon) &= \overline{E}^0_3(x,t) + \varepsilon E^1_3(x,\xi,t) + \ldots; \end{aligned} \tag{2}$$

для $A = 3$

$$\begin{aligned} H_\alpha(x,\xi,t,\varepsilon) &= H^0_\alpha(x,\xi,t) + \varepsilon H^1_\alpha(x,\xi,t) + \ldots, \\ E_\alpha(x,\xi,t,\varepsilon) &= E^0_\alpha(x,\xi,t) + \varepsilon E^1_\alpha(x,\xi,t) + \ldots . \end{aligned} \tag{3}$$

Черта над буквой здесь и далее означает, что соответствующая величина не зависит от ξ.

Подстановка разложений (2) или (3) в уравнения (1) позволяет получить уравнения относительно H^0_α, E^0_α:

для $A = 2$

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{3\alpha\beta}\frac{\partial H^0_\beta}{\partial \xi_\alpha} = 0, \quad \varepsilon_{3\alpha\beta}\frac{\partial E^0_\beta}{\partial \xi_\alpha} = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}(\mu H^0_\alpha) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}(\varkappa E^0_\alpha) = 0; \end{aligned} \tag{4}$$

для $A = 3$

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{\gamma\alpha\beta}\frac{\partial H^0_\beta}{\partial \xi_\alpha} = 0, \quad \varepsilon_{\gamma\alpha\beta}\frac{\partial E^0_\beta}{\partial \xi_\alpha} = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}(\mu H^0_\alpha) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}(\varkappa E^0_\alpha) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Решения уравнений (4), (5) ищутся в форме

$$H^0_\alpha = \left(\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \xi_\alpha} + \delta_{\alpha\beta}\right)\overline{H}^0_\beta, \quad E^0_\alpha = \left(\frac{\partial \Psi_\beta}{\partial \xi_\alpha} + \delta_{\alpha\beta}\right)\overline{E}^0_\beta. \tag{6}$$

В (6) Φ_β, Ψ_β — функции ξ, подлежащие определению.

В результате подстановки (6) в (4) или (5) получаются следующие уравнения относительно Φ_β, Ψ_β:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\left[\mu(\xi)\left(\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\xi_\alpha}+\delta_{\alpha\beta}\right)\right]=0,\\&\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\left[\varkappa(\xi)\left(\frac{\partial\Psi_\beta}{\partial\xi_\alpha}+\delta_{\alpha\beta}\right)\right]=0.\end{aligned}\tag{7}$$

Для решения уравнений в частных производных типа (7) в периодических средах в [2] разработана методика, основанная на численном интегрировании уравнений на ячейке периодичности. В настоящей заметке для решения уравнений (7) предлагается следующая итерационная процедура, использующая описанную выше структуру функций $\mu(\xi)$, $\varkappa(\xi)$:

$$\begin{aligned}&\mu_0\Delta_\xi\Phi_\beta^{n+1}=-\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\left[\mu_1(\xi)\left(\frac{\partial\Phi_\beta^n}{\partial\xi_\alpha}+\delta_{\alpha\beta}\right)\right],\quad \Phi_\beta^0=0,\\&\varkappa_0\Delta_\xi\Psi_\beta^{n+1}=-\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\left[\varkappa_1(\xi)\left(\frac{\partial\Psi_\beta^n}{\partial\xi_\alpha}+\delta_{\alpha\beta}\right)\right],\quad \Psi_\beta^0=0\end{aligned}\tag{8}$$

(Δ_ξ — оператор Лапласа). Уравнения (8) при каждом n могут быть решены аналитически стандартными методами математической физики.

После нахождения функций Φ_β, Ψ_β, входящих в (6), из (1), (2), (3), (6) с помощью процедуры осреднения по ξ получается система уравнений для определения $\overline{H}_k^0$, $\overline{E}_k^0$ [3]:

$$\varepsilon_{ijk}\frac{\partial\overline{H}_k^0}{\partial x_j}=\frac{1}{c}\overline{\varkappa}_{ij}\frac{\partial\overline{E}_j^0}{\partial t},\quad \varepsilon_{ijk}\frac{\partial\overline{E}_k^0}{\partial x_j}=-\frac{1}{c}\overline{\mu}_{ij}\frac{\partial\overline{H}_j^0}{\partial t}.\tag{9}$$

В уравнениях (9) $\overline{\varkappa}_{ij}$, $\overline{\mu}_{ij}$ — компоненты осредненных тензоров соответственно диэлектрической и магнитной проницаемости, которые определяются следующими соотношениями [3]:

для $A=2$

$$\begin{aligned}&\overline{\varkappa}_{\alpha\beta}=\left\langle\varkappa\left(\frac{\partial\Psi_\beta}{\partial\xi_\alpha}+\delta_{\alpha\beta}\right)\right\rangle,\quad \overline{\varkappa}_{i3}=\overline{\varkappa}_{3i}=<\varkappa>\delta_{i3},\\&\overline{\mu}_{\alpha\beta}=\left\langle\mu\left(\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\xi_\alpha}+\delta_{\alpha\beta}\right)\right\rangle,\quad \overline{\mu}_{i3}=\overline{\mu}_{3i}=<\mu>\delta_{i3};\end{aligned}\tag{10}$$

для $A=3$

$$\overline{\varkappa}_{ij}=\left\langle\varkappa\left(\frac{\partial\Psi_j}{\partial\xi_i}+\delta_{ij}\right)\right\rangle,\quad \overline{\mu}_{ij}=\left\langle\mu\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial\xi_i}+\delta_{ij}\right)\right\rangle.\tag{11}$$

В (10) и (11) символ $\langle\cdots\rangle$ означает осреднение по ξ.

Как следует из (10) и (11), осредненные характеристики соответствуют однородной, но, вообще говоря, анизотропной среде.

Таким образом, из (6)–(11) полностью определяются главные члены разложений (2) или (3). Повторение описанной процедуры позволяет найти в случае необходимости и следующие слагаемые в разложениях (2) или (3).

Сходным образом рассчитываются электромагнитные процессы в электропроводных средах. При этом в исходных уравнениях электродинамики в квазистационарном приближении вместо D_i будут фигурировать компоненты плотности тока, а вместо $\varkappa$ — проводимость среды $\sigma(\xi)$ [3].

Литература

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М., 1982.
2. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М., 1984.
3. *Моргунов Б.И.* Математический анализ физико-механических процессов. М., 1995.

Поступила в редакцию
10.04.98

УДК 621.372.2

О КОРНЕВЫХ ВЕКТОРАХ ВОЛНОВОДА СО СЛОЖНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

А. Н. Боголюбов, А. Л. Делицын, А. Г. Свешников

(*кафедра математики*)

Рассматривается вопрос о полноте системы корневых векторов волновода. Применяется новый подход, сводящий задачу к исследованию линейного операторного пучка. Сформулированы теоремы о полноте корневых векторов пучка и дискретности спектра.

В стандартном подходе к исследованию задачи о модах регулярного волновода со сложным диэлектрическим заполнением возникают значительные трудности при решении проблемы полноты системы корневых векторов волновода. За исключением работ [1] и [2, 3], посвященных достаточно частным случаям, эта задача фактически не исследовалась. Предлагаемый подход к задаче определения мод диэлектрического волновода позволяет рассматривать обобщенную задачу на собственные значения с линейным вхождением спектрального параметра.