

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-01-01081).

Литература

1. Еремин Ю.А., Орлов Н.В., Свеишиков А.Г. // Матем. моделирование. 1996. №10. С. 113.
2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., 1970.

3. Еремин Ю.А., Свеишиков А.Г. Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. М., 1992.
4. Дмитриев В.И. Поля в слоистых средах. М., 1963.
5. Еремин Ю.А., Орлов Н.В., Свеишиков А.Г. // ЖВМ и МФ. 1995. 35, №6. С. 918.
6. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. М., 1978. Т. 1.

Поступила в редакцию
08.12.97

УДК 519.6:616+518.0

ОБ УСЛОВНО-КОРРЕКТНЫХ ПОСТАНОВКАХ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

В. Б. Гласко, Ю. В. Гласко, Д. Г. Полянин, С. В. Родионов

(кафедра математики)

На примере двух задач из иммунологии и сейсмологии обсуждаются возможности их естественной условно-корректной постановки и алгоритмики. Даны результаты математического эксперимента по оценке модуля непрерывности.

Сформулированное в работе [1] понятие условно-корректной (корректной по А. Н. Тихонову) постановки задачи обобщает теорему Тихонова [2], обосновывающую метод подбора при решении обратных задач типа интерпретации данных физического эксперимента. Такие задачи приводят к операторному уравнению

$$Az = u, z \in Z, u \in U,$$

где Z и U — некоторые метрические пространства, и обычно являются неустойчивыми в своей первичной постановке, т. е. при отражении из U в Z , даже в том случае, если при точных входных данных обладают, и причем единственным, решением. Согласно [1], в условно-корректной постановке выделяется подмножество $\bar{Z} \subset Z$ (множество корректности), обладающее тем свойством, что а) ему заведомо принадлежит единственное при заданном $\bar{u} \in A\bar{Z}$ точное решение задачи; б) достаточно малым возмущениям \bar{u} , не выводящим z из \bar{Z} , отвечают сколь угодно малые возмущения решения.

В работе [3] указаны возможности построения множества корректности (явно или алгоритмически) путем постановки вспомогательной задачи с использованием количественной или качественной информации об искомом решении, алгоритмы решения которой обладают свойством «регуляризирующих» по А. Н. Тихонову.

Представляют, однако, интерес такие обратные задачи, в которых множество корректности выделяется самой первичной постановкой, т. е. естественным образом, в отличие, например, от искусственно формулируемых при классическом подборе компактных множеств. Для их решения можно использовать обычные алгоритмы вычислительной математики.

В настоящей статье рассматриваются две такие задачи из разных прикладных областей. Устанавли-

вается корректность их постановки по А. Н. Тихонову и посредством математического эксперимента для характерных моделей решения оценивается зависимость его погрешности от погрешности входных данных — модуль непрерывности [1]. Такая оценка может быть полезна при планировании физического эксперимента, доставляющего исходные данные.

1. Иммуитет организма по отношению к вредным воздействиям обеспечивается деятельностью определенных клеток в составе крови [4], характеризующихся уровнем активности x . Распределение числа таких клеток по уровню активности $n = n(x)$ может быть описано решением задачи [5]:

$$\frac{dn}{dx} = \frac{1}{\Phi(x)} (\lambda - k\dot{\Phi}(x)) n, \quad x > x_0, \quad n(x_0) = n_0, \quad (1)$$

где λ, k — некоторые константы, а $\Phi(x)$ — положительный функциональный параметр, соответствующий скорости спонтанного спада активности.

Решение (1) допускает экспериментальное изучение с помощью специального прибора (проточного цитометра [6]), и возникающая здесь обратная задача состоит в определении «причинной» функции $\Phi(x)$ по наблюдаемому следствию: $n = n(x)$.

В работе [5] эта задача решалась для узкого класса аналитически заданных функций Φ , зависящих от двух числовых параметров, которые и определялись. Здесь предлагается более общая постановка задачи.

Будем считать, что $\Phi(x)$ принадлежит множеству M положительных дважды дифференцируемых на $[x_0, x]$ функций, удовлетворяющих условию $\Phi(x_0) = \varphi_0$ при заданном φ_0 . Пусть \mathcal{N} — множество отображений M с помощью оператора A , разрешающего задачу (1):

$$A\Phi = n(x), \quad \Phi \in M. \quad (2)$$

Теорема 1. Задача (2) условно-корректна на M при любой функции $n \in \mathcal{N}$.

Заметим прежде всего, что M есть подмножество области определения оператора A и на нем $n(x)$ непрерывно дифференцируема и не обращается в нуль. Решение $\varphi(x)$ задачи (2) существует при любой $n \in \mathcal{N}$ по определению \mathcal{N} . Очевидно, с другой стороны, что $\Phi(x)$ совпадает с решением задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, коэффициенты которого дважды дифференцируемы. Следовательно, решение задачи (2) единственно. Устойчивость решения на множестве корректности M очевидна из следующего его аналитического представления:

$$\Phi(x) = \frac{\lambda}{k} \int_{x_0}^x \left(\frac{n(x)}{n(\xi)} \right)^{1/k} d\xi + \varphi_0 \left(\frac{n(x)}{n(x_0)} \right)^{1/k}. \quad (3)$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче множество корректности вводится самой постановкой как множество решений некоторой задачи Коши при минимальной дополнительной информации.

Как видно из (3), для определения искомой функции на практике достаточно знать лишь $n = n(x)$. Поскольку последняя определяется в эксперименте с некоторой неустранимой погрешностью, принципиальное значение приобретает изучение модуля непрерывности обратной задачи.

Соответствующий математический эксперимент проводится нами для постулированной в [5] «пробной» функции:

$$\Phi(x) = \varphi_0 e^{\omega x}. \quad (4)$$

Этой функции соответствует распределение, передающее в основном поведение гистограмм некоторого типа:

$$\nu(x) \equiv \frac{n(x)}{n_0} = \exp \left(\frac{\lambda}{\varphi_0 \omega} (1 - e^{-\omega x}) - k \varphi_0 x \right). \quad (5)$$

В этом эксперименте точное решение (4) обратной задачи (2), (3) заранее известно, погрешность входных данных (5) управляется параметрически: $\nu(x) \rightarrow \tilde{\nu}(x)$, а соответствующее этому возмущенное значение $\tilde{\Phi}(x)$ можно определить по формуле (3).

В расчетах значения $\nu(x)$ вычислялись на достаточно мелкой, чтобы не внести вычислительных погрешностей, равномерной сетке $\{x_j\} \subset [x_0, \hat{x}]$ при заданных x_0 и \hat{x} , на которой интеграл в (3) аппроксимировался по формуле трапеций. Погрешность входных данных имитировалась формулой

$$\tilde{\nu}_j = \nu_j \left(1 + \delta \frac{\eta_j}{\sqrt{\sum_j \nu_j^2 \eta_j^2}} \right), \quad (6)$$

где $\{\eta_j\}$ — случайные числа с равномерным распределением на $[-1, 1]$; при этом вводимая погрешность

относительна, и δ — ее среднеквадратичная мера: $\sum_j (\tilde{\nu}_j - \nu_j)^2 = \delta^2$.

Приближенные значения $\tilde{\Phi}$ можно получить по формуле (3), рассматриваемой на более редкой (в наших расчетах — в десять раз) сетке $\{x_s\}$. Однако при большом уровне погрешности $\tilde{\nu}$ неестественно пользоваться поточечной аппроксимацией, и мы использовали также среднеквадратичное приближение искомой функции. В этом случае аппроксимация решения находится путем минимизации функции

$$\Psi(\{\Phi_s\}) \equiv \sum_s \left(\Phi_s - \tilde{\Phi}_s(\tilde{\nu}) \right)^2, \quad (7)$$

где $\tilde{\Phi}_s(\tilde{\nu})$ вычисляются на редкой сетке по формуле (3). Для минимизации (7) был использован метод Розенброка [6]. Оба подхода привели к устойчивым и сходным результатам в достаточно широком диапазоне погрешностей.

Полученные приближенные значения $\tilde{\Phi}$ сравнивались с точными (4), и относительная погрешность результата оценивалась по формуле

$$\varepsilon = \max_s \left| \frac{\tilde{\Phi}_s - \Phi_s}{\Phi_s} \right|. \quad (8)$$

Приведенная на рис. 1 зависимость $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ относится к следующим значениям параметров: $\lambda = k = \omega = \varphi_0 = 1$, $x_0 = 0$, $\hat{x} = 10$, число узлов сетки $\{x_j\}$ равно 100. Видно, что допустимая погрешность эксперимента, согласуемая в каждой точке с величиной ν , составляет величину $\sim 10^{-1}$. Отметим, что попытка отказаться от такого согласования,

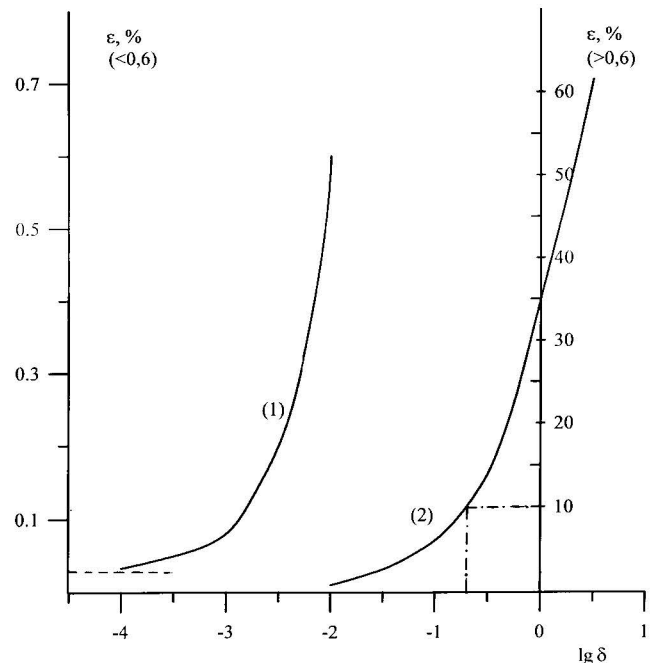


Рис. 1. Модуль непрерывности для обратной задачи имитологии: $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ в диапазоне $10^{-5} \leq \delta \leq 10^{-2}$ (1) и $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ в диапазоне $10^{-2} \leq \delta \leq 10$ (2); штриховая линия — уровень погрешности метода, штрих-пунктирная — граница допустимых погрешностей ($\varepsilon < 10\%$)

предположив, что во всех точках уровень погрешности один и тот же:

$$\tilde{y}_j = y_j + \delta \frac{\eta_j}{\sqrt{\sum_j \eta_j^2}}, \quad (9)$$

приводит к существенно худшему результату. В этом случае уже при $\delta = 10^{-3}$ его погрешность достигает 50%. Таким образом, несмотря на устойчивость задачи, для моделей, характеризуемых большим диапазоном порядков значений $n(x)$, предъявляются повышенные требования к точности эксперимента.

2. Задача об определении характеристик истинных колебаний почвы по показаниям сейсмографа (обратная задача сейсмометрии) впервые рассматривалась в работе [7], где для простых моделей использовались точные аналитические представления решения, что исключало анализ вопросов корректности.

Можно, однако, заметить, что намеченное в [7] направление включает две разнородные постановки, требующие принципиально различной алгоритмики.

Независимо от того, какая характеристика входного сигнала определяется, задача, связанная с изучением финитного сигнала, приводит к интегральному уравнению Вольтерра первого рода:

$$\int_0^t K(t-\tau)x(\tau)d\tau = y(t), \quad (10)$$

где $K(t-\tau)$ — импульсная характеристика прибора, $x(t)$ — характеристика сигнала, действующего на прибор начиная с момента $t=0$, $y(t)$ — показания прибора.

В формуле (10) $x(\tau)$ пропорциональна силе, действующей на подвижную систему сейсмографа: $x(\tau) = -V_0\ddot{\xi}(\tau)$, если $\xi(\tau)$ — истинное колебание почвы, а V_0 — некоторый числовой параметр (увеличение прибора [8]). Функция $x(\tau)$ представляет самостоятельный интерес, и относительно нее уравнение (10) есть, как известно, некорректная задача, требующая использования регуляризирующих алгоритмов.

Однако интерес может представлять $\xi(\tau)$ — функция, описывающая смещения контактирующей с приборами точки земной поверхности от положения равновесия. Относительно нее задача, как мы ниже убедимся, оказывается условно-корректной, допускающей использование классических вычислительных алгоритмов.

Выделим множество M дважды непрерывно-дифференцируемых на $[0, T]$ ($0 \leq \tau \leq t \leq T$) функций, удовлетворяющих (для определенности) условиям $\xi(0) = \xi(T) = 0$. Воспользуемся явным выражением ядра K [8]: $K(u) = (1/\omega)e^{-\sigma u} \sin \omega u$ при известных числовых параметрах сейсмографа (σ, ω).

Тогда интегрирование по частям в (10) приводит к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

относительно $\xi(t)$:

$$\xi(t) = Y(t) + \int_0^t \kappa(t-\tau)\xi(\tau)d\tau \equiv A\xi + Y, \quad (11)$$

где $\kappa(u) \equiv (1/\omega)e^{-\sigma u} [(\sigma^2 - \omega^2) \sin \omega u - 2\sigma\omega \cos \omega u]$ и $Y(t)$ — непрерывная функция, определяемая только показаниями прибора: $Y(t) = y(t)/V_0$.

Т е о р е м а 2. Задача (11) условно-корректна на множестве M .

Действительно, если $Y(t) \in \mathcal{N}$ — множество отображений M с помощью (10), как следует из построения (11), то решение этого уравнения Вольтерра второго рода существует и принадлежит M заведомо. В работе [9] такие уравнения анализировались и в более общем случае: для любой непрерывной $Y(t)$ с помощью классического итерационного процесса

$$\xi_{n+1} = A\xi_n + Y \quad (12)$$

установлена единственность решения. С помощью (12) можно убедиться, в свою очередь, что если $v(t) \equiv Y^{(1)}(t) - Y^{(2)}(t)$ и $\max_{[0, T]} |v(t)| < \delta$, то для $\sigma(t) \equiv \xi^{(1)}(t) - \xi^{(2)}(t)$ имеем: $\max_{[0, T]} |\sigma(t)| \leq \delta e^{BT}$, где B — верхняя оценка $\kappa(u)$. Это доказывает устойчивость решения.

Таким образом, условная корректность рассматриваемой обратной задачи сейсмометрии вытекает из ее естественной редукции к интегральному уравнению Вольтерра второго рода при минимальной дополнительной информации об искомом решении.

В математических экспериментах, проводимых для стандартной функции (импульс Барлога [8]),

$$\hat{\xi}(t) = \begin{cases} t e^{-\alpha t} \sin \beta t, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t < 0, \quad t > T. \end{cases} \quad (13)$$

Отметим, что уравнение (11) допускает два метода решения:

- а) метод последовательных приближений на аппроксимирующей сетке;
- б) метод редукции к алгебраической системе с последующим использованием стандартной процедуры (в нашем случае — процедура Гаусса с выбором главного элемента).

Как выяснилось, второй метод оказывается экономичнее для более широкого диапазона погрешностей.

Для оценки модуля непрерывности в математическом эксперименте абсолютная погрешность входных данных имитировалась по формуле

$$\tilde{y}_j = y_j + \delta \frac{\chi_j}{\sqrt{\Delta t \sum_j \chi_j^2}}, \quad (14)$$

где Δt — шаг сетки, $\chi_j \in [-1, 1]$ — случайная величина с равномерным распределением; здесь $\{y_j\}$ — сеточная аппроксимация $y(t)$, предварительно рассчитанная по (13).

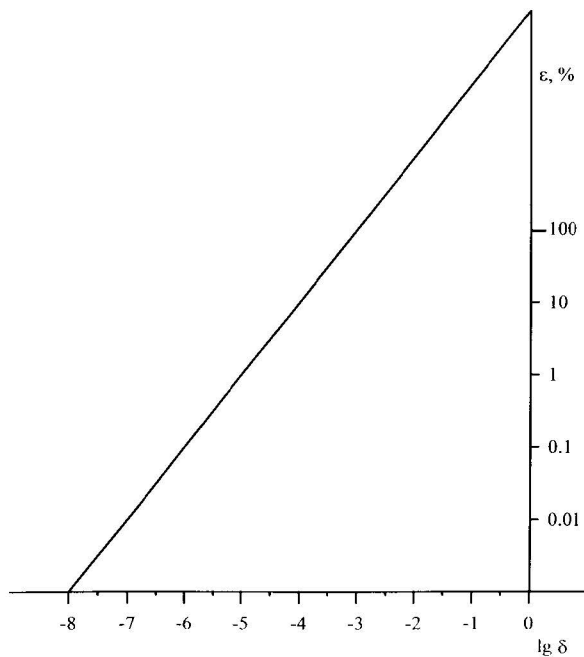


Рис. 2. Модуль непрерывности для обратной задачи сейсмометрии

Погрешность результата (априорно известного в эксперименте) оценивалась по формуле

$$\varepsilon = \max_i |\xi_i - \hat{\xi}_i|. \quad (15)$$

Результат, представленный на рис. 2 в логарифмическом масштабе, относится к варианту [5] $\sigma = 0,07$;

$\omega = 1,12$; $\alpha = 1,1$; $\beta = 0,7$; $V_0 = 1$; $T = 9,6$ (с). Конечная аппроксимация проводилась на равномерной сетке $\{t_j\} \subset [0, T]$ с шагом $\Delta t = T/50$.

Видно, что за пределами погрешности метода $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ — практически линейная функция, а граница допустимых погрешностей эксперимента (для $\varepsilon \leq 70\%$) составляет $\delta = 10^{-4}$.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность В. Н. Земскову и Л. Н. Рыкунову за полезные обсуждения, В. М. Репину и В. Ф. Бутузову — за внимание к работе.

Литература

1. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, 1962.
2. Тихонов А.Н. // ДАН СССР. 1943. **39**, № 5. С. 195.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., 1979.
4. Бернет Ф. Целостность организма и иммунитет. М., 1964.
5. Васильев О.С., Гласко В.Б., Гласко Ю.В. и др. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 4. С. 7 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 4. P. 7).
6. Хаитов Р.М., Пинечик Б.В., Истамов Х.И. Экологическая иммунология. М., 1995.
7. Голицын Б.Б. Лекции по сейсмометрии. Спб., 1912.
8. Саваренский Е.Ф., Кириос Д.П. Элементы сейсмологии и сейсмометрии. М., 1955.
9. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. М., 1989.

Поступила в редакцию
17.12.97

УДК 530.1

ПЕРЕНОРМИРОВКА ПО ЛИНИЯМ: НОРМАЛЬНЫЕ И АНОМАЛЬНЫЕ ТОЖДЕСТВА УОРДА В МОДЕЛИ ЯНГА–МИЛЛСА

Д. А. Славнов

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

В рамках размерной перенормировки по линиям получено производящее уравнение для нормальных и аномальных тождеств Уорда в модели Янга–Миллса. Подтверждено, что за киральные аномалии ответственны только однопетлевые диаграммы.

В статье автора [1] была предложена новая перенормировочная схема — перенормировка по линиям. В рамках этой схемы в статьях [2, 3] представлен вариант размерной перенормировки, в котором используются только целые и положительные размерности. Наконец, в статье [4] выведено производящее уравнение для тождеств Уорда, которым подчиняются перенормированные по такой схеме функции Грина. Развита в статье [4] общая процедура в настоящей работе используется с небольшой модификацией для получения нормальных и аномальных тождеств Уорда в конкретном случае — в модели Янга–Миллса.

Сердцевинной используемой перенормировочной процедуры является операция «перенормированно-

го интегрирования» в импульсном (здесь предполагается евклидовом) пространстве. Для однозначного определения операции на промежуточных этапах приходится считать, что размерность 2ζ импульсного пространства достаточно высокая. Однако если при рассмотрении учитывается только конечное число диаграмм Фейнмана, то можно ограничиться конечной размерностью. Минимальная допустимая размерность определяется числом «внешних импульсов» k_i ($i = 1, \dots, m$), фигурирующих в рассматриваемых диаграммах. В качестве таких импульсов могут выступать как собственно импульсы, так и другие внешние векторные или тензорные величины, например векторные и тензорные поля, а также «тензорные токи» (см. [3]).