УДК 539.12.01

СЮРПРИЗЫ КВАНТОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Ю. И. Воронцов

(*кафедра молекулярной физики и физических измерений*)

Формальный анализ состояния объекта после измерения координаты показал, что условная дисперсия импульса может зависеть от результата измерения координаты и быть меньше дисперсии импульса в начальном состоянии даже при отсутствии корреляции между импульсом и квадратом импульса с координатой. Это не поддается обычному статистическому объяснению и являет собой пример еще одного из неклассических следствий квантовой теории.

Обсудим возможные результаты следующего эксперимента. В заданном ансамбле у каждой из частиц сначала измеряется приближенно координата x, а затем измеряется точно сопряженный импульс p. Измерение координаты косвенное, т.е. характер эволюции частиц после измерения координаты такой же, как и до измерения. В итоге такого эксперимента получим множество пар чисел $(\tilde{x}_i, \tilde{p}_i)$ — результатов последовательных измерений координаты и импульса. Выберем подмножество пар $(\tilde{x}, \tilde{p}_i)$ с некоторым заданным значением $\tilde{x}$ и вычислим соответствующую этому подансамблю плотность распределения (ПР) импульса $w(\tilde{p}|\tilde{x})$. С точки зрения квантовой теории измерений эта апостериорная плотность распределения (АПР) импульса будет ПР импульса в состоянии частицы после измерения координаты, давшего результат $\tilde{x}$.

В теории измерений разработан математический аппарат, связывающий апостериорное состояние с начальным состоянием частицы и точностью измерения ее координаты. Этот анализ будет проведен ниже. Сначала попытаемся представить его результат, исходя из некоторых, кажущихся бесспорными положений.

1. При измерении координаты прибор сообщает частице случайный импульс (например, при рассеянии фотона), который добавляется к начальному импульсу частицы. Поэтому ПР импульса, вычисленная по всем парам $(\tilde{x}_i, \tilde{p}_i)$ (безусловная плотность распределения), будет соответствовать ПР суммы двух независимых случайных величин. Безусловная дисперсия импульса будет равна

$$\Delta^2\tilde{p} = \Delta_0^2 p + \Delta_p^2 p,$$

где $\Delta_0^2 p$ — дисперсия p в начальном состоянии частицы, $\Delta_p^2 p$ — дисперсия возмущения импульса со стороны прибора.

2. Может ли условная дисперсия (УД) импульса $\Delta^2\tilde{p}(\tilde{x})$ быть больше или меньше безусловной? Быть больше или меньше дисперсии в начальном состоянии? Очевидно, что может, если в начальном состоянии частицы ее импульс коррелирует с координатой, поскольку в этом случае сортировка результатов измерения по $\tilde{x}$ будет сопровождаться соответствующей сортировкой по $\tilde{p}$. А если такой корреляции нет и, кроме того, возмущение импульса не коррелирует с результатом измерения координаты? В этом случае с позиций классической физики невозможно объяснить, почему условная дисперсия импульса отличается от безусловной, или тем более оказывается меньше дисперсии в исходном состоянии.

Сделанный ниже формальный анализ в рамках квантовой теории измерений дает иной ответ. УД импульса может зависеть от результата измерения координаты и быть меньше дисперсии импульса в начальном состоянии даже при отсутствии названных выше корреляций. Это пример еще одного из неклассических следствий квантовой теории.

Принципиальные положения квантовой теории измерений были сформулированы основателями квантовой механики [1–3] и обсуждались во многих публикациях. Глубокий анализ теории косвенных измерений сделан Л. И. Мандельштамом [4]. Современная квантовая теория измерений отличается от ее истоков в основном более развитым математическим аппаратом.

Процесс косвенного измерения представляют следующим [4–6]. Вначале с объектом взаимодействует квантовое звено прибора (квантовая считывающая система (КСС)). На этом этапе имеет место обычное динамическое взаимодействие двух квантовых систем. Затем КСС необратимо взаимодействует с классической частью прибора, в результате чего возникает, уже на классическом уровне, информация о значении определенной наблюдаемой КСС. Чтобы по этому результату измерения можно было оценить значение наблюдаемой $\hat{A}$ объекта, от нее должна зависеть наблюдаемая КСС после взаимодействия прибора с объектом. Для этого достаточно, чтобы гамильтониан взаимодействия КСС с объектом был бы равен

$$\hat{H}_i = -\alpha_0 \hat{A}\hat{Y},$$

где $\hat{Y}$ — некоторый оператор КСС, α_0 — c-числовой коэффициент, отличный от нуля только в течение короткого времени τ. Это условие, идущее еще от фон Неймана [1], называют стандартной схемой измерения.

Если до взаимодействия объект находился в состоянии, описываемом матрицей плотности $\hat{\rho}_0$, а КСС в состоянии $\hat{\rho}_a$, то в момент разрыва взаимодействия их общим состоянием будет

$$\hat{\rho}(\tau) = \hat{U}(\tau)\hat{\rho}_0\hat{\rho}_a\hat{U}^+(\tau),$$

где $\hat{U}(\tau)$ — оператор совместной эволюции объекта и прибора.

Если величины α_0 и τ удовлетворяют условию мгновенного измерения, т.е. $\alpha_0\tau = \alpha$, $\alpha_0\tau^2 \to 0$, то можно считать

$$\hat{U}(\tau) = \exp\{i\alpha\hat{A}\hat{Y}\}.$$

Здесь и ниже используется система единиц, в которой $\hbar = 1$. Состояние $\hat{\rho}(\tau)$ отличается от начального тем, что сопряженная с $\hat{A}$ наблюдаемая смещена на $\alpha\hat{Y}$, а наблюдаемая КСС $\hat{P}$, сопряженная с $\hat{Y}$, смещена на $\alpha\hat{A}$.

После взаимодействия КСС с объектом происходит измерение P, которое дает некоторое число $\tilde{P}$. Величина $(\tilde{P} - \langle P(0)\rangle)/\alpha$ принимается в качестве результата измерения $\tilde{a}$ наблюдаемой объекта $\hat{A}$. Она соответствует оценке по методу максимального правдоподобия. (В дальнейшем будем считать $\langle P(0)\rangle = 0$.)

Условная плотность распределения наблюдаемой B объекта будет равна

$$w(B|\tilde{P}) = \frac{\langle B|\langle\tilde{P}|\hat{\rho}(\tau)|\tilde{P}\rangle|B\rangle}{w(\tilde{P})}, \tag{1}$$

где нормирующий множитель $w(\tilde{P})$ — безусловная плотность распределения значений $\tilde{P}$.

Дальнейшие расчеты проведем для случая чистых начальных состояний объекта и прибора, т. е. при $\hat{\rho}_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$, $\hat{\rho}_a = |\varphi_a\rangle\langle\varphi_a|$. При этих условиях несложные преобразования дают

$$w(B|\tilde{P}) = \frac{\left|\int \psi_0(A)\langle B|A\rangle\langle\tilde{P}|\,\mathrm{e}^{i\alpha A\hat{Y}}\,|\varphi_a\rangle dA\right|^2}{w(\tilde{P})}. \tag{2}$$

Это соответствует ПР величины B в чистом состоянии

$$|\psi_1\rangle = \frac{\int \psi_0(A)\varphi_a(\tilde{P} - \alpha A)|A\rangle dA}{w(\tilde{P})^{1/2}}. \tag{3}$$

В частности, если A — координата, B — импульс, то соответствующая (3) волновая функция будет равна

$$\psi_1(x|\tilde{x}) = \frac{\psi_0(x)\varphi_a(\tilde{P} - \alpha x)}{w(\tilde{x})^{1/2}}.$$

В общем случае форма волновой функции ψ_1 зависит от формы функций ψ_0 и φ_a и от значения $\tilde{x}$. Только в некоторых частных случаях форма функции ψ_1 будет подобна форме функции ψ_0, например когда ψ_0 и φ_a являются гауссовскими. Следствием зависимости формы волновой функции от $\tilde{x}$ будет зависимость АПР импульса от результата измерения координаты.

Допустим, что

$$\varphi_a(\tilde{P} - \alpha x) = \frac{\exp\{-(\tilde{P} - \alpha x)^2/(4\Delta^2 P)\}}{(\sqrt{2\pi}\Delta P)^{1/2}} = \frac{\exp\{-(\tilde{x} - x)^2/(4\Delta_m^2 x)\}}{(\sqrt{2\pi}\Delta_m x)^{1/2}},$$

где $\tilde{x} = \tilde{P}/\alpha$, $\Delta_m x = \Delta P/\alpha$, а $\psi_0(x)$ близка к «прямоугольной», т. е. $\psi_0(x) \approx 1/\sqrt{l}$ при $-l/2 < x < l/2$ и быстро (экспоненциально) спадает до нуля вне этого интервала.

Обратим внимание на то, что при таких начальных состояниях координата и импульс не коррелируют между собой ни у объекта, ни у прибора. Однако форма апостериорной волновой функции $\psi_1(x)$ и соответственно форма АПР импульса зависят от $\tilde{x}$. Например, при $\Delta_m x << l/2$ и $|\tilde{x}| << l/2 - \Delta_m x$ функция $\psi_1(x|\tilde{x})$ будет близка к гауссовской. Если же второе неравенство не выполняется, то ψ_1 будет гауссоидой, оборванной при $|x| = l/2$. Как следствие апостериорная дисперсия импульса частицы во втором случае будет больше, чем в первом. При этом апостериорное среднее значение импульса от $\tilde{x}$ не зависит. Этот пример бесспорно доказывает, что условная дисперсия импульса частицы может зависеть от результата измерения координаты и соответственно быть больше и меньше безусловной, даже если в начальном состоянии импульс и координата не коррелируют. И это при том, что динамическое действие прибора на частицу заключается только в смещении ее импульса на αY независимо от $\tilde{x}$.

Еще более неожиданным является то, что при тех же начальных состояниях УД импульса может быть меньше, чем дисперсия импульса в начальном, невозмущенном состоянии. И это происходит несмотря на то, что прибор увеличивает неопределенность импульса частицы. Для доказательства этого придется прибегнуть к численному счету. Для расчета дисперсии импульса по заданной волновой функции $\psi_1(x)$ требуется вычисление двойного интеграла в широком интервале значений x и p, что связано с чрезмерно большим для персональных компьютеров объемом вычислений. Поэтому, без уменьшения общности доказательства, рассмотрим пример изменения дисперсии фазы при измерении энергии гармонического осциллятора.

В качестве эрмитова оператора фазы со спектром собственных значений в интервале 2π использовался оператор Пегга–Барнета [7]. Начальным состоянием осциллятора считалось «прямоугольное» состояние

$$|\psi_0\rangle = (1/(m - k + 1))^{1/2} \sum_k^m |n\rangle.$$

Плотность распределения фазы

$$w(\phi) = |\sum_0^\infty \mathrm{e}^{-i\phi n}\psi(n)|^2$$

в этом состоянии равна

$$w_0(\phi) = \frac{\sin^2((m-k+1)\phi/2)}{2\pi(m-k+1)\sin^2(\phi/2)}. \tag{4}$$

Положим

$$\psi_a(\tilde{P} - \alpha n) = \frac{\exp\{-(\tilde{n}-n)^2/(4\Delta_m^2 n)\}}{(\sqrt{2\pi}\Delta_m n)^{1/2}},$$

где $\tilde{n} = \tilde{P}/\alpha$, $\Delta_m n = \Delta P/\alpha$. Получим

$$\psi_1(n|\tilde{n}) = (1/(m-k+1))^{1/2} \sum_k^m \psi_a(\tilde{n} - n).$$

Соответствующая АПР фазы будет равна

$$w(\phi|\tilde{n}) = \frac{\left|\sum_k^m \exp\{-i\phi n\} \exp\{(\tilde{n}-n)^2/(4\Delta_m^2 n)\}\right|^2}{2\pi \sum_k^m \exp\{-(\tilde{n}-n)^2/(2\Delta_m^2 n)\}}.$$

Функция $w(\phi|\tilde{n})$, как и $w_0(\phi)$, симметрична относительно $\phi = 0$. Следовательно, апостериорное среднее фазы $\langle\phi(\tilde{n})\rangle$ равно начальному среднему независимо от значения $\tilde{n}$. (Равно нулю, если интервал изменения фазы выбран от $-\pi$ до π.)

Расчет показал, что $w(\phi|\tilde{n})$, как и $w_0(\phi)$, не зависит от абсолютных значений m и k. Результаты расчета при $m-k=5$ следующие. Если $\tilde{n}$ попадает в середину интервала $m-k$, то УД фазы $\Delta_1^2\phi$ меньше начальной $\Delta_0^2\phi = 0,46$ при любых значениях $\Delta_m^2 n > 1/(4\Delta_0^2\phi)$. Минимальное значение $\Delta_1^2\phi = 0,24$ получается при $\Delta_m^2 n \approx 1,5$. При $\Delta_m^2 n = 1,5$, но $\tilde{n} = 0$, получено $\Delta_1^2\phi = 0,82 > \Delta_0^2\phi$. Дисперсия динамического возмущения фазы во всех случаях равна $1/(4\Delta_m^2 n)$. Результаты расчета доказывают, что апостериорная дисперсия фазы может быть меньше дисперсии фазы в начальном состоянии даже при отсутствии корреляции ϕ и ϕ^2 с n. Этот расчет дает основание также утверждать, что подобное же соотношение может иметь место между апостериорной и начальной дисперсиями импульса частицы при измерении координаты.

На первый взгляд, исходя из полученных результатов, можно сделать следующее заключение. Хотя начальная волновая функция не указывает явно на зависимость импульса от координаты, на самом деле максимальную дисперсию импульса имеют частицы, координаты которых близки к скачку функции $\psi_0(x)$. На примере формирования «прямоугольной» волновой функции с помощью щели это можно было бы объяснить следующим образом. Возмущается импульс только тех частиц, которые проходят близко к краю щели. Однако такое простое квазиклассическое объяснение не согласуется с тем, что, например, положение нулей ПР импульса (фазы) зависит от ширины щели (см. (4)).

С точки зрения квантовой теории собственные значения оператора импульса являются волновыми числами волн e^{ipx}, суперпозиция которых образует волновую функцию

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi(p) e^{ipx} dp.$$

Спектральная функция $\varphi(p)$ зависит от формы всей функции $\psi(x)$, а не отдельных ее участков. Прибор, точно измеряющий импульс, дает волновое число одной из пространственных гармоник. (Для этого он должен иметь бесконечную область взаимодействия.) При таком взгляде волновая функция выступает не как математическая абстракция, а как некая физическая реальность. Если расчет процесса измерения показывает, что ПР импульса изменяется, то мы должны согласиться с тем, что произошло изменение волновой функции. Тогда придется признать, что при взаимодействии частицы с КСС происходит не только динамическое, описываемое уравнением Шрёдингера взаимодействие, но и некий таинственный квантовый процесс редукции состояния, выражающийся не в классическом переходе от априорной к апостериорной вероятности, а в изменении формы волновой функции с соответствующим изменением ее спектральной функции $\varphi(p)$. Волновая функция в результате взаимодействия с измеряющим координату прибором изменяется так, словно она проходит через пространственный фильтр с коэффициентом пропускания $\varphi_a(\tilde{x} - x)$, хотя из характера динамического взаимодействия это не следует. Эти формально согласующиеся с математическим аппаратом рассуждения ведут в такие дебри последствий, из которых не видно выхода. Поэтому они не могут безоговорочно считаться описанием физической реальности, как не считаются бесспорными различные трактовки квантовой механики (статистическая, копенгагенская, скрытых параметров, многомировая и т.д. В книге Садбери [8] рассмотрены девять различных интерпретаций квантового формализма.)

Проблему изменения состояния при измерении обсуждают со времени появления основополагающих работ по квантовой механике. Но рассматривались такие примеры, результат расчета которых давал возможность представить редукцию волновой функции как тривиальный переход от априорного к апостериорному распределению координаты. Если бы, например, нас интересовала не АПР импульса $w(p|\tilde{x})$, а АПР координаты $w(x|\tilde{x})$, то мы бы получили известную классическую формулу Байеса [4]:

$$w(x|\tilde{x}) = \frac{w_0(x) w_a(\tilde{x}|x)}{w(\tilde{x})}.$$

Ее можно было бы получить, считая частицу и измерение координаты классическими, характеризуя состояние частицы и прибора только плотностями распределения, а не волновыми функциями. Тому, что апостериорное распределение координаты у́же исходного, можно было дать простое статистическое объяснение. Этим снималась необходимость обсуждения загадочного процесса коллапса волновой функции.

Полученные выше, не имеющие классического объяснения, свойства АПР импульса, насколько известно автору, не проверялись ни в одном из экспериментов.

Основой таких экспериментов могла бы быть описанная в [9] изящная техника эксперимента с атомными пучками. Она позволила достаточно надежно реконструировать функцию Вигнера прошедшего через две щели пучка атомов гелия. Если такую установку удастся дополнить каким-либо косвенным измерением поперечной координаты атомов за щелью, то можно будет проверить описанный выше эффект редукции волновой функции при измерении.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-02-16391-а).

Литература

1. *Фон Нейман И.* Математические основы квантовой механики. М., 1964.
2. *Дирак П.А.М.* Принципы квантовой механики. М., 1964.
3. *В. Гейзенберг.* Физические принципы квантовой теории. Л.; М., 1932.
4. *Мандельштам Л.И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М., 1972.
5. *Braginsky V.B., Khalili F.Ya.* Quantum Measurements. Cambridge, 1992.
6. *Воронцов Ю.И.* Теория и методы макроскопических измерений. М., 1989.
7. *Pegg D.T., Barnett S.M.* // Phys. Rev. 1989. **A39**. P. 1665.
8. *Садбери А.* Квантовая механика и физика элементарных частиц. М., 1989.
9. *Kurtsiefer Ch., Pfau T., Mlynek J.* // Nature. 1997. **386**. P. 150.

Поступила в редакцию
26.12.97

УДК 539.12.01

ДИРАКОВСКИЙ ФЕРМИОН В СИЛЬНОМ КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ В 2+1 ИЗМЕРЕНИЯХ

В. Р. Халилов

(*кафедра теоретической физики*)

Изучается эффект образования пар заряженных фермионов сильным внешним кулоновским полем в двух пространственных измерениях. Найдены точные решения уравнения Дирака в кулоновском поле в 2+1 измерениях. Показано, что поведение нижних уровней энергии электрона в сильном кулоновском поле существенно различно для случаев двух и трех пространственных измерений. Получено уравнение для определения критического заряда, которое решено численно для одной простой модели. Критический заряд в 2+1 измерениях существенно меньше его значения для той же модели в 3+1 измерениях.

Двумерные системы нерелятивистских заряженных фермионов, связанные с калибровочными электромагнитным и Черна–Саймонса полями, привлекают значительный интерес в последние годы в связи с их весьма необычными свойствами, которые позволили применить эти модели к изучению таких квантовых макроскопических явлений, как дробный квантовый эффект Холла и высокотемпературная сверхпроводимость [1, 2]. Некоторые эффекты в физике конденсированных сред указывают на то, что не только (2+1)-мерные нерелятивистские фермионные системы, но также (2+1)-мерные системы со спектром энергий, который определяется гамильтонианом уравнения Дирака, по-видимому, существуют [3–5]. Свойства квантовых (2+1)-мерных систем частиц вызывают и чисто теоретический интерес в связи с теорией анионов — частиц, подчиняющихся дробной статистике в 2+1 измерениях [2]. Это является мотивацией настоящей работы.

Здесь мы найдем точные решения уравнения Дирака в кулоновском поле для электрона, считая, что его движение ограничено в плоскости, и обсудим эффект рождения пар заряженных фермионов (т. е. электронов и позитронов) из вакуума сильным кулоновским полем в 2+1 измерениях, предсказанный в работе [6] и всесторонне исследованный в работах [7–13] для случая 3+1 измерений.

Нелишне напомнить, что в (3+1)-мерной квантовой механике выражение для энергии основного состояния электрона в кулоновском поле точечного заряда $Z|e|$ теряет смысл, когда $E_0(Z)$ обращается в нуль. Для нахождения энергетического спектра электрона в кулоновском поле в этом случае необходимо поставить некоторое граничное условие при $r = 0$, т. е. следует рассматривать потенциал, обрезанный на некотором расстоянии R [13]. С точки зрения физики рассмотрение обрезанного кулоновского потенциала эквивалентно учету конечных размеров ядра, создающего кулоновский потенциал.

В случае трех пространственных измерений спектр энергий электрона в сильном поле обрезанного (на малых расстояниях) кулоновского потенциала впервые был исследован в работе [13]. Оказалось, что с ростом Z в области $Z > 137$ уровни энергии