

исходного, можно было дать простое статистическое объяснение. Этим снималась необходимость обсуждения загадочного процесса коллапса волновой функции.

Полученные выше, не имеющие классического объяснения, свойства АПР импульса, насколько известно автору, не проверялись ни в одном из экспериментов.

Основой таких экспериментов могла бы быть описанная в [9] изящная техника эксперимента с атомными пучками. Она позволила достаточно надежно реконструировать функцию Вигнера прошедшего через две щели пучка атомов гелия. Если такую установку удастся дополнить каким-либо косвенным измерением поперечной координаты атомов за щелью, то можно будет проверить описанный выше эффект редукции волновой функции при измерении.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-02-16391-а).

Литература

1. Фон Нейман И. Математические основы квантовой механики. М., 1964.
2. Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики. М., 1964.
3. В. Гейзенберг. Физические принципы квантовой теории. Л.; М., 1932.
4. Мандельштам Л.И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М., 1972.
5. Braginsky V.B., Khalili F.Ya. Quantum Measurements. Cambridge, 1992.
6. Воронцов Ю.И. Теория и методы макроскопических измерений. М., 1989.
7. Pegg D.T., Barnett S.M. // Phys. Rev. 1989. A39. P. 1665.
8. Садбери А. Квантовая механика и физика элементарных частиц. М., 1989.
9. Kurtsiefer Ch., Pfau T., Mlynek J. // Nature. 1997. 386. P. 150.

Поступила в редакцию
26.12.97

УДК 539.12.01

ДИРАКОВСКИЙ ФЕРМИОН В СИЛЬНОМ КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ В 2+1 ИЗМЕРЕНИЯХ

В. Р. Халилов

(кафедра теоретической физики)

Изучается эффект образования пар заряженных фермионов сильным внешним кулоновским полем в двух пространственных измерениях. Найдены точные решения уравнения Дирака в кулоновском поле в 2+1 измерениях. Показано, что поведение нижних уровней энергии электрона в сильном кулоновском поле существенно различно для случаев двух и трех пространственных измерений. Получено уравнение для определения критического заряда, которое решено численно для одной простой модели. Критический заряд в 2+1 измерениях существенно меньше его значения для той же модели в 3+1 измерениях.

Двумерные системы нерелятивистских заряженных фермионов, связанные с калибровочными электромагнитным и Черна–Саймонса полями, привлекают значительный интерес в последние годы в связи с их весьма необычными свойствами, которые позволили применить эти модели к изучению таких квантовых макроскопических явлений, как дробный квантовый эффект Холла и высокотемпературная сверхпроводимость [1, 2]. Некоторые эффекты в физике конденсированных сред указывают на то, что не только (2+1)-мерные нерелятивистские фермионные системы, но также (2+1)-мерные системы со спектром энергий, который определяется гамильтонианом уравнения Дирака, по-видимому, существуют [3–5]. Свойства квантовых (2+1)-мерных систем частиц вызывают и чисто теоретический интерес в связи с теорией анионов — частиц, подчиняющихся дробной статистике в 2+1 измерениях [2]. Это является мотивацией настоящей работы.

Здесь мы найдем точные решения уравнения Дирака в кулоновском поле для электрона, считая, что его движение ограничено в плоскости, и обсудим эффект

рождения пар заряженных фермионов (т. е. электронов и позитронов) из вакуума сильным кулоновским полем в 2+1 измерениях, предсказанный в работе [6] и всесторонне исследованный в работах [7–13] для случая 3+1 измерений.

Нелишне напомнить, что в (3+1)-мерной квантовой механике выражение для энергии основного состояния электрона в кулоновском поле точечного заряда $Z|e|$ теряет смысл, когда $E_0(Z)$ обращается в нуль. Для нахождения энергетического спектра электрона в кулоновском поле в этом случае необходимо поставить некоторое граничное условие при $r = 0$, т. е. следует рассматривать потенциал, обрезанный на некотором расстоянии R [13]. С точки зрения физики рассмотрение обрезанного кулоновского потенциала эквивалентно учету конечных размеров ядра, создающего кулоновский потенциал.

В случае трех пространственных измерений спектр энергий электрона в сильном поле обрезанного (на малых расстояниях) кулоновского потенциала впервые был исследован в работе [13]. Оказалось, что с ростом Z в области $Z > 137$ уровни энергии

электрона становятся отрицательными и продолжают опускаться до границы нижнего континуума $-m$. Значение $Z = Z_{\text{кр}}$, при котором нижний уровень энергии электрона достигает границы нижнего континуума, называют критическим для основного состояния [10–12]. Если $Z > Z_{\text{кр}}$, то основной уровень энергии электрона “погружается” в нижний континуум, и если этот уровень не был заполнен, то в результате возникшего квазистационарного состояния рождаются два позитрона, которые под действием кулоновского отталкивания уходят на бесконечность, а вакуум квантовой электродинамики (КЭД), возмущенный сверхкритическим кулоновским полем, приобретает заряд $2e$ [10–12]. В статье используется система единиц, в которой $c = \hbar = 1$.

Квантовомеханическая задача о движении релятивистского электрона с массой m и зарядом $e = -e_0$, $e_0 > 0$ в двух пространственных измерениях во внешнем кулоновском поле, моделирующем поле тяжелого ядра, может быть решена точно. Вектор-потенциал кулоновского поля в декартовых координатах зададим так:

$$A^0(r) = -Ze_0/r, \quad A^x = A^y = 0. \quad (1)$$

Поскольку (см., напр., [3]) в 2+1 измерениях алгебра матриц Дирака может быть представлена в терминах матриц Паули, выберем представление $\gamma^0 = \sigma^3$, $\gamma^k = i\sigma^k$ и запишем уравнение Дирака в виде

$$(i\partial_t - H_D)\Psi = 0, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} H_D &= \alpha \mathbf{P} + \beta m + eA^0 \equiv \\ &\equiv \sigma^1 P_2 - \sigma^2 P_1 + \sigma^3 m + eA^0, \end{aligned} \quad (3)$$

а $P_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu$ — оператор обобщенного импульса электрона.

Решение уравнения (2) в поле (1) будем искать в полярных координатах r, φ в виде

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\varphi} (-i\epsilon E t + i l \varphi) \psi(r, \varphi), \quad (4)$$

где $\epsilon = \pm 1$ — знак, $E > 0$ — абсолютное значение энергии, l — целое число и

$$\psi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} f(r) \\ g(r)e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в (2) и учитывая равенства

$$P_x \pm iP_y = -ie^{\pm i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial r} \pm \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (6)$$

получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dr} - \frac{l}{r}f + (\epsilon E + m + \frac{Z\alpha}{r})g &= 0, \\ \frac{dg}{dr} + \frac{1+l}{r}g - (\epsilon E - m + \frac{Z\alpha}{r})f &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Точное решение уравнения Дирака и дискретный спектр энергий $\epsilon E < m$ можно найти в полной аналогии с вычислениями [14]. Для этого будем искать функции f и g в виде [14]:

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{m+E} e^{-\rho/2} \rho^{\gamma-1} (Q_1 + Q_2), \\ g &= \sqrt{m-E} e^{-\rho/2} \rho^{\gamma-1} (Q_1 - Q_2), \end{aligned} \quad (8)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \rho &= 2\lambda r, \quad \lambda = \sqrt{m^2 - E^2}, \\ \gamma &= 1/2 + \sqrt{(l+1/2)^2 - (Z\alpha)^2}, \quad \alpha \equiv e^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Нелишне отметить, что величину γ мы нашли, исследуя поведение волновых функций при малых r , и что справедливо равенство $(\gamma - 1/2)^2 - (Z\alpha E/\lambda)^2 = (l + 1/2)^2 - (Z\alpha m/\lambda)^2$.

Далее, проводя преобразования системы уравнений (7) в соответствии со случаем трех пространственных измерений, нетрудно выразить их решение, конечное при $\rho = 0$, через вырожденную гипергеометрическую функцию $F(a, b; z)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_1 &= AF(\gamma - 1/2 - (Z\alpha E/\lambda), 2\gamma; \rho), \\ Q_2 &= BF(\gamma + 1/2 - (Z\alpha E/\lambda), 2\gamma; \rho), \end{aligned} \quad (10)$$

причем связь между постоянными A и B определяется соотношением

$$B = \frac{\gamma - 1/2 - Z\alpha E/\lambda}{l + 1/2 + Z\alpha m/\lambda} A. \quad (11)$$

Спектр энергий определяется из уравнения

$$\gamma - \frac{1}{2} - \frac{Z\alpha E}{\lambda} = -n_r, \quad (12)$$

причем нетрудно показать, что допустимы следующие значения квантового числа n_r : $0, 1, 2, \dots$ при $l \geq 0$ и $1, 2, 3, \dots$ при $l < 0$. Следовательно, дискретный спектр энергий электрона в поле (1) имеет вид

$$E = m \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{(n_r + \sqrt{(l+1/2)^2 - (Z\alpha)^2})^2} \right]^{-1/2}. \quad (13)$$

Этот спектр энергий похож на спектр энергий скалярной заряженной частицы в кулоновском поле в трех пространственных измерениях, так как в (2+1)-мерной квантовой теории электрон ведет себя подобно бесспиновому фермиону. Однако между спектрами истинного бозона и бесспинового электрона есть существенное отличие. Так, энергия электрона на низшем уровне ($l = n_r = 0$) равна

$$E_0 = m\sqrt{1 - (2Z\alpha)^2}. \quad (14)$$

Энергия E_0 нижнего уровня обращается в нуль при $Z\alpha = 1/2$. Напомним, что в трех пространственных измерениях энергия фермиона E_0 обращается в

нуль при $Z\alpha = 1$, а энергия бесспиновой заряженной частицы на нижнем уровне при $Z\alpha = 1/2$ равна $m/\sqrt{2}$. Выражение для энергии основного состояния электрона в кулоновском поле точечного заряда теряет смысл, когда $E_0(Z)$ обращается в нуль. Соответствующие волновые функции осциллируют при $r \rightarrow 0$, вследствие чего отсутствует граничное условие в начале координат [10–12].

Для нахождения энергетического спектра электрона в кулоновском поле в этом случае необходимо поставить некоторое граничное условие при $r = 0$, т.е. следует рассматривать потенциал, обрезанный на некотором расстоянии R [13], что с точки зрения физики эквивалентно учету конечных размеров ядра. Предполагая, что в случае двух пространственных измерений с ростом Z в области $2Z > 137$ поведение уровней энергии электрона аналогично трехмерному случаю, т.е. они становятся отрицательными и опускаются до границы нижнего континуума $-m$, покажем, что такая ситуация действительно имеет место.

Для этого рассмотрим решения и спектр уравнения Дирака в области $2Z > 137$ и определим соответствующее значение Z_{cr} . Поскольку для определения Z_{cr} мы должны рассматривать энергии вблизи границы нижнего континуума $-m$, уравнение Дирака запишем с учетом того, что $\epsilon E \approx -m$. Вводя функции $F(r) = rf(r)$ и $G(r) = rg(r)$ и исключая из системы (7) $G(r)$, приходим к уравнению, определяющему функцию F вблизи границы нижнего континуума $-m$ в виде

$$\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \left(E^2 - m^2 + \frac{2\epsilon E Z \alpha}{r} + \frac{(Z\alpha)^2 - l(l+1)}{r^2} \right) F(r) = 0. \quad (15)$$

Заметим, что вблизи границы верхнего континуума, т.е. при $\epsilon E \approx m$, уравнением (15) после замены $F(r)$ на $G(r)$ определяется функция $G(r)$.

Решение уравнения (15), убывающее при $r \rightarrow \infty$, выражается через функцию Уиттекера вида

$$F(r) = DW_{\beta, i\nu}(2\lambda r), \quad (16)$$

где

$$\beta = \epsilon E Z \alpha / \lambda, \quad \nu = \sqrt{(Z\alpha)^2 - (l+1/2)^2}, \quad \lambda = \sqrt{m^2 - E^2}. \quad (17)$$

Решение для $G(r)$ вблизи $\epsilon E = -m$ находится из равенства

$$G(r) = \frac{1}{Z\alpha} \left((1+l)F - \frac{dF}{dr} \right) \quad (18)$$

с использованием рекуррентных соотношений для функций Уиттекера.

Вблизи границы верхнего континуума решение (16) с $\epsilon E = m$ описывает функцию $G(r)$. Связанное состояние электрона (при $|E| < m$ или $\lambda > 0$) всегда локализовано в пространстве, независимо от того,

находится ли это связанное состояние вблизи верхнего или нижнего континуума. Это легко установить, используя асимптотическое представление для функций Уиттекера для больших значений аргумента $|z|$ в виде

$$W_{\beta, \nu}(z) \sim e^{-z/2} (z)^\beta. \quad (19)$$

Такое поведение волновых функций связанного состояния электрона легко объяснить, рассматривая уравнение (15) как одномерное уравнение Шрёдингера, описывающее некоторую частицу с эффективной энергией $E' = (E^2 - m^2)/2m$ в поле с эффективным потенциалом

$$U_{eff}(r) = -\epsilon E Z \alpha / mr - (Z\alpha)^2 / 2mr^2.$$

Отметим, что в случае $\epsilon E = -m$ эффективный потенциал является потенциалом с широким барьером (о поведении эффективного потенциала в (3+1)-мерном случае см., напр., [12]). Нелишнее подчеркнуть, что в 2+1 измерениях эффективный потенциал не содержит члена $-s(s+1) \equiv -3/4$, зависящего от спина электрона. Отметим также, что волновые функции осциллируют при $|E| > m$.

Значение Z_{cr} можно найти с использованием полученных точных решений. Сделаем это для простой модели, задавая потенциал в виде

$$\begin{aligned} A_0^Z(r) &= -Ze_0/r, & r \geq R; \\ A_0^Z(r) &= -Ze_0/R, & r \leq R. \end{aligned} \quad (20)$$

В области $r \leq R$ уравнение для функции $F(r)$ имеет вид

$$\frac{d^2 F}{dr^2} - \frac{dF}{rdr} + \left(\left(\epsilon E + \frac{Z\alpha}{R} \right)^2 - m^2 + \frac{1-l^2}{r^2} \right) F(r) = 0, \quad (21)$$

решение которого выражается через функции Бесселя ($J_n(z)$) и функции Неймана ($N_n(z)$) целочисленного индекса n следующим образом [15]:

$$F(r) = r(A_1 J_{|l|}(\kappa r) + B_1 N_{|l|}(\kappa r)), \quad (22)$$

где

$$\kappa = \sqrt{\left(\epsilon E + \frac{Z\alpha}{R} \right)^2 - m^2}. \quad (23)$$

Для конечности $F(r)$ при $r = 0$ необходимо, чтобы $B_1 = 0$.

Для нахождения спектра уравнения Дирака необходимо сплечь решения в точке $r = R$:

$$\left(\frac{G(r)}{F(r)} \right)_{r=R-0} = \left(\frac{G(r)}{F(r)} \right)_{r=R+0}. \quad (24)$$

В частности, в случае основного состояния $l = 0$ при $\epsilon E = -m$, учитывая, что параметр R мал по сравнению с комптоновской длиной электрона $1/m$, так что можно полагать $\kappa \approx Z\alpha/R$, получим трансцендентное уравнение, определяющее (при фиксированном R) критический заряд [16]:

$$\frac{J_1(X)}{J_0(X)} = \left(1 - \frac{xW'_{\beta, i\nu/2}(x)}{W_{\beta, i\nu/2}(x)}\right), \quad (25)$$

где $X = Z_{\text{cr}}\alpha$, $\nu = \sqrt{(2X)^2 - 1}$, $\beta = -mZ\alpha/\lambda$, $x = \lambda R$ и штрих означает производную по аргументу функции Уиттекера x .

Численное решение (25) при $Rm = 0,03$ и $0,02$ дает соответственно $Z_{\text{cr}} \approx 89,84$ [16], что значительно меньше, чем для аналогичной модели в 3+1 измерениях, где, например, значение критического заряда при $Rm = 0,03$ равно $Z_{\text{cr}} \approx 170$ [10–12]. Отметим также, что с уменьшением R уменьшается и Z_{cr} .

Следовательно, вакуум (2+1)-мерной КЭД в сильном кулоновском поле должен проявлять неустойчивость по отношению к образованию электрон-позитронных пар при существенно меньших значениях критического заряда, чем в (3+1)-мерной КЭД. Свойства вакуума (2+1)-мерной КЭД и связь модели с теорией Черна–Саймонса будут рассмотрены в другой статье.

Литература

1. The Quantum Hall Effect. 2nd ed. / Eds. R.E. Prange, S.M. Girvin. New York, 1990.
2. Wilczek F. Fractional Statistics and Anyon Superconductivity. Singapore, 1990.
3. Neagu A., Schakel A.M.J. // Phys. Rev. 1993. **D48**. P. 1785.
4. Schakel A.M.J. // Phys. Rev. 1991. **D43**. P. 1428.
5. Schakel A.M.J., Semenoff C.W. // Phys. Rev. Lett. 1991. **66**. P. 2653.
6. Герштейн С.С., Зельдович Я.Б. // ЖЭТФ. 1969. **57**. С. 654.
7. Reinhardt J., Greiner W. // Rep. Progr. Phys. 1977. **40**. P. 219.
8. Rafelski J., Fulcher L. P., Klein A. // Phys. Reports. 1978. **C38**. P. 227.
9. Soffel M., Müller B., Greiner W. // Ibid. 1982. **C85**. P. 51.
10. Зельдович Я.Б., Попов В.С. // УФН. 1971. **105**. С. 403.
11. Мигдал А.Б. Фермионы и бозоны в сильных полях. М., 1978.
12. Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М. Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. М., 1988.
13. Pomeranchuk I., Smorodinsky Ya. // J. Phys. USSR. 1945. **9**. P. 97.
14. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. М., 1980.
15. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963.
16. Khalilov V.R., Ho C.L. // Mod. Phys. Lett. 1998. **A13**. P. 615.

Поступила в редакцию
29.12.97

УДК 534:517.9

ГЛОБАЛЬНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В ЦЕПОЧКЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А. Ю. Лоскутов, С. Д. Рбэлко

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Аналитически показано, что в цепочке из параметрически линейно сцепленных квадратичных отображений наблюдается явление глобальной синхронизации, т.е. стремление системы к тривиальному равновесному состоянию.

Введение

Развитие качественной теории дифференциальных уравнений показывает, что поведение многих физических, химических и ряда других *распределенных* систем может быть эффективно смоделировано сетью (или решеткой) отображений, т.е. популяцией взаимодействующих подсистем. Такие подсистемы могут быть как детерминированными, для которых последующее состояние $\mathbf{x}_{n+1}$ единственным образом определяется последовательностью предыдущих состояний $\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_{n-2}, \dots$, так и вероятностными, когда задана вероятность перехода подсистемы в новое состояние. Наиболее часто в качестве динамических систем, составляющих решетку, выбираются одномерные отображения $T_a: x \mapsto f(a, x)$, или, в тер-

минах итераций,

$$x_{n+1} = f(x_n, a).$$

При этом связь между отображениями может осуществляться по-разному. Наиболее часто используется диффузионный вид связи (см., напр., [1–6]), когда каждый элемент (i, j) в сети взаимодействует с соседними по диффузионному закону. В двумерном случае такая связь может быть записана как

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{i,j} = & f(x_n^{i,j}, a) + \\ & + d_1 \left[f(x_n^{i-1,j}, a) - 2f(x_n^{i,j}, a) + f(x_n^{i+1,j}, a) \right] + \\ & + d_2 \left[f(x_n^{i,j-1}, a) - 2f(x_n^{i,j}, a) + f(x_n^{i,j+1}, a) \right], \end{aligned}$$