

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.12

СТАТИЧЕСКАЯ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ
В СКАЛЯРНО-ТЕНЗОРНОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

В. И. Денисов, Х. Х. Эрнандес

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Проведено интегрирование системы нелинейных дифференциальных уравнений скалярно-тензорной теории гравитации нового типа в случае статического сферически симметричного источника. Построено постньютоновское разложение полученного решения и показано, что предсказания этой теории согласуются с результатами всех экспериментов, выполненных в слабом гравитационном поле Солнечной системы. Указано на существенное отличие полученной метрики от метрики Шварцшильда в области сильных полей.

В настоящее время в научной литературе активно обсуждается новый класс скалярно-тензорных теорий гравитации, в которых гравитационное воздействие осуществляется не только через метрический тензор псевдориманова пространства-времени g_{ik} , но и через скалярное гравитационное поле ψ . Характерной особенностью этих теорий, которые отличают их от теорий типа Бранса–Дикке, является то, что скалярное гравитационное поле входит в лагранжиан, введенный в работе [1], только в виде 4-градиентов. Это обстоятельство снимает ряд вопросов о влиянии аддитивной константы на ход гравитационных процессов и позволяет привести в соответствие предсказываемое теоретическое значение параметра замедления Вселенной с его наблюдаемым в эксперименте значением.

Целью настоящей статьи является построение статического сферически симметричного решения уравнений этой теории и анализ на его основе возможностей для обнаружения влияния скалярной части гравитационного поля на результаты экспериментов, которые можно провести в пределах Солнечной системы.

Рассмотрим в системе координат, где $c = G = 1$, лагранжиан скалярно-тензорной теории нового типа:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{-g} R + \mathcal{L}_M(\tilde{g}_{ik}, \varphi_a) + \lambda\sqrt{-g} g^{lm} \partial_l \psi \partial_m \psi, \quad (1)$$

где R — скалярная кривизна, соответствующая метрическому тензору g_{ik} , g — определитель этого тензора, φ_a — остальные поля материи. Эффективный метрический тензор $\tilde{g}_{ik}$, который описывает воздействие гравитационного поля на вещество, зависит от тензора g_{ik} и скалярного гравитационного поля следующим образом:

$$\tilde{g}_{lm} = g_{lm} I^s + b \partial_l \psi \partial_m \psi I^p, \quad (2)$$

где

$$I = 1 + w g^{hj} \partial_h \psi \partial_j \psi. \quad (3)$$

Здесь λ, w, b — постоянные величины; s, p — числовые параметры.

Варьируя лагранжиан (1) с учетом соотношений (2) и (3), получим следующие уравнения:

$$\partial_m [\lambda \sqrt{-g} g^{lm} \partial_l \psi] = 0, \quad (4)$$

$$R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R + 16\pi\lambda \left(\frac{1}{2} g^{ik} g^{lm} - g^{il} g^{km} \right) \partial_l \psi \partial_m \psi = 0, \quad (5)$$

которые справедливы вне вещества, т. е. в тех областях пространства, где тензор энергии-импульса материи $\tilde{T}_M^{lm} = 0$.

Опуская индексы в уравнении (5), получим соотношение

$$R_{ik} = 16\pi\lambda \partial_i \psi \partial_k \psi. \quad (6)$$

Переходя к статической сферически симметричной модели, интервал $d\tau^2$ представим в виде

$$d\tau^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - C(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (7)$$

Полагая, что гравитационное скалярное поле также зависит только от радиальной координаты, т. е. $\psi = \psi(r)$, уравнение (4) приведем к виду, позволяющему его достаточно просто проинтегрировать:

$$\frac{d}{dr} \left(\sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}} C(r) \sin \theta \frac{d\psi(r)}{dr} \right) = 0.$$

Поэтому

$$\frac{d\psi(r)}{dr} = \frac{q}{C(r)} \sqrt{\frac{B(r)}{A(r)}}, \quad (8)$$

где q — постоянная интегрирования.

Из уравнений (6) и последнего соотношения получим систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно неизвестных компонент метрики $A(r), B(r), C(r)$:

$$R_{00} = \frac{A''}{2B} - \frac{A'B'}{4B^2} - \frac{A'^2}{4AB} + \frac{A'C'}{2BC} = 0,$$

$$R_{11} = -\frac{A''}{2A} - \frac{C''}{C} + \frac{A'^2}{4A^2} + \frac{C'^2}{2C^2} + \frac{A'B'}{4AB} + \frac{B'C'}{2BC} = \xi \frac{B}{2AC^2},$$

$$R_{22} = -\frac{C''}{2B} + \frac{B'C'}{4B^2} - \frac{A'C'}{4AB} + 1 = 0, \quad (9)$$

где для краткости величина $32\pi\lambda q^2$ обозначена ξ , а компоненты метрики обозначены без указания аргумента r . Штрих означает производную по r .

Решение этой системы уравнений существенно зависит от знака величины $\rho_g^2 + \xi$ (в дальнейшем обозначено для краткости как a^2), причем, что интересно, ρ_g является константой интегрирования, имеющей физический смысл гравитационного радиуса центрального источника.

В случае, когда $a^2 \geq 0$, решением системы нелинейных дифференциальных уравнений (9) являются следующие функции:

$$\begin{aligned} A(r) &= \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{\rho_g/a}, \\ B(r) &= \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-\rho_g/a}, \\ C(r) &= r^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{1-\rho_g/a}. \end{aligned} \quad (10)$$

Очевидно, что при выключении скалярного поля ($\xi = 0$) метрические компоненты (10) принимают те же значения, что и в теории Эйнштейна.

Несложно убедиться, что при $a^2 \rightarrow 0$ соотношения (10) переходят в следующие:

$$\begin{aligned} A(r) &= \exp \left\{ -\frac{\rho_g}{r} \right\}, \\ B(r) &= \exp \left\{ \frac{\rho_g}{r} \right\}, \\ C(r) &= r^2 \exp \left\{ \frac{\rho_g}{r} \right\}. \end{aligned}$$

И наконец, решение уравнений (9) при условии $a^2 < 0$ определяется выражениями

$$\begin{aligned} A(r) &= \exp \left\{ -\frac{2\rho_g}{a} \operatorname{arccctg} \left(\frac{2r}{a} - 1 \right) \right\}, \\ B(r) &= \exp \left\{ \frac{2\rho_g}{a} \operatorname{arccctg} \left(\frac{2r}{a} - 1 \right) \right\}, \\ C(r) &= r^2 \left(1 - \frac{a}{r} + \frac{a^2}{2r^2} \right) \exp \left\{ \frac{2\rho_g}{a} \operatorname{arccctg} \left(\frac{2r}{a} - 1 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Для наших целей наибольший интерес представляет случай, когда $a^2 > 0$. Проанализируем его подробнее. Подставляя в соотношение (8) выражения найденной метрики (10), получим следующую формулу для скалярного гравитационного поля:

$$\psi(r) = \psi_0 + \frac{q}{a} \ln \left(1 - \frac{a}{r} \right).$$

На больших расстояниях от центрального источника последнее соотношение переходит в выражение

$$\psi(r) = \psi_0 - \frac{q}{r}.$$

Движение пробных тел согласно нашей теории будет определяться метрикой в эффективном римановом пространстве-времени $\tilde{g}_{ik}$, компоненты которого имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{00} &= A(r) I^s, \quad \tilde{g}_{11} = -B(r) I^s + \frac{bq^2}{r^4} \left(1 - \frac{a}{r} \right)^{-2} I^p, \\ \tilde{g}_{22} &= -C(r) I^s, \quad \tilde{g}_{33} = \tilde{g}_{22} \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (11)$$

где I выражается следующим образом:

$$I = 1 - \frac{wq^2}{r^4} \left(1 - \frac{a}{r} \right)^{\rho_g/a-2}. \quad (12)$$

Как известно, для оценки возможных для наблюдения гравитационных эффектов в пределах Солнечной системы необходимо построить постньютоновское разложение, т.е. следует представить метрику (11), (12) в виде разложений в ряд по обратным степеням радиальной координаты r до порядка $\sim 1/r^2$ включительно. До начала такого построения заметим, что величина I , определяемая соотношением (12), имеет поправку вида $\sim 1/r^4$, так же как и второе слагаемое в выражении для $\tilde{g}_{11}$ в (11). Поэтому с постньютоновской точностью найдем разложение метрики, определяемой соотношениями (10).

Так как метрику следует представить в изотропной форме, то в выражение (10) необходимо ввести изотропную радиальную переменную ρ в соответствии с равенством

$$r = \rho \left(1 + \frac{a}{4\rho} \right)^2.$$

Подставляя это выражение в (10), получим

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{00} &= \left(\frac{1 - a/(4\rho)}{1 + a/(4\rho)} \right)^{2\rho_g/a}, \\ \tilde{g}_{11} &= \left(1 - \frac{a^2}{16\rho^2} \right)^2 \left(\frac{1 + a/(4\rho)}{1 - a/(4\rho)} \right)^{2\rho_g/a}, \\ \tilde{g}_{22} &= \rho^2 \tilde{g}_{11}. \end{aligned} \quad (13)$$

При переходе $\xi \rightarrow 0$ эти выражения принимают форму решения Шварцшильда [2] в изотропных координатах.

Используем стандартный постньютоновский формализм, согласно которому разложение метрики (13) следует представить в виде

$$\tilde{g}_{00} = 1 - 2\alpha \frac{\mu}{\rho} + 2\beta \frac{\mu^2}{\rho^2} + \dots, \quad \tilde{g}_{11} = 1 + 2\gamma \frac{\mu}{\rho} + \dots,$$

где α , β , γ — постньютоновские параметры теории, μ — активная гравитационная масса центрального источника.

Выражая метрику (13) в виде разложений по обратным степеням изотропной координаты ρ , получим

$$\tilde{g}_{00} = 1 - \frac{\rho_g}{\rho} + \frac{\rho_g^2}{2\rho^2}, \quad \tilde{g}_{11} = 1 + \frac{\rho_g}{\rho}.$$

Таким образом, для коэффициентов робертсоновского разложения найдены значения

$$\alpha = \beta = \gamma = 1,$$

а для активной гравитационной массы получаем выражение

$$\mu = \frac{\rho_g}{2}.$$

Эти выражения полностью согласуются с ограничениями, накладываемыми на коэффициенты, которые получены из результатов гравитационных экспериментов, выполненных к настоящему времени в слабом гравитационном поле Солнечной системы. Таким образом, рассматриваемая нами скалярно-тен-

зорная теория гравитации является жизнеспособной. Так как метрика (11), (12) этой теории существенно отличается от соответствующей метрики Шварцшильда только в области сильных гравитационных полей, то предсказания данной теории наиболее сильно будут отличаться от предсказаний теории Эйнштейна лишь в окрестности компактных массивных тел, таких, как нейтронные звезды. Поэтому существование скалярного гравитационного поля, помимо космологии, наиболее ярко будет проявляться в астрофизических эффектах и в процессах, сопровождающихся излучением гравитационных волн.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 98-02-17448а).

Литература

1. Денисов В.И., Мехта Б.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1996. №3. С. 17 (Moscow University Phys. Bull. 1996. No. 3. P. 10).
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М., 1988.

Поступила в редакцию
06.02.98

УДК 539.12.01

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВАКУУМНЫЕ ЭФФЕКТЫ И ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕПРОВОДЯЩИХ КРИСТАЛЛОВ В ИНТЕНСИВНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

В. Н. Родионов*)

На основе использования точных решений квантовых уравнений движения заряженных частиц в электромагнитном поле, представляющем собой комбинацию постоянного магнитного поля и поля волны, рассчитаны вероятности и сечения процессов фоторождения e^+e^- и ядерного β -распада. Показано, что полученные выражения, учитывающие влияние поля на нормированные характеристики процесса $\gamma' + \gamma'' \rightarrow e^+ + e^-$, содержат в себе и результаты, характеризующие коэффициенты поглощения непроводящих кристаллов в поле. Оценена полевая нестабильность протона во внешнем интенсивном поле и отмечено, что на границе тяжелых ядер могут возникать условия для эффективного β -превращения нуклонов.

Как известно, изучение воздействия интенсивных электромагнитных полей на различные фундаментальные процессы, основанное на использовании точных решений релятивистских квантовых уравнений движения заряженных частиц, ведется достаточно планомерно (см., напр., [1–7] и цитированные там работы). Причем сюда включаются как реакции, рассмотрение которых не выходит за рамки чистой квантовой электродинамики [2–5], так и процессы, имеющие неэлектромагнитную природу [3, 6, 7].

Совсем недавно в рамках использования точно решаемых моделей автором был получен ряд результатов по расчету вероятности процесса ядерного β -распада во внешних электромагнитных полях, имеющих сложную конфигурацию [6] — комбинацию постоянного магнитного поля и поля плоской электромаг-

нитной волны циркулярной поляризации. Подобным же образом могут быть рассчитаны и вероятности ряда других процессов, и в частности реакций образования пары e^+e^- двумя фотонами, распространяющимися навстречу друг другу во внешнем электромагнитном поле той же структуры [7].

В настоящей заметке обратим внимание на ряд общих закономерностей, которые присущи фотовзаимодействию в системах, имеющих, казалось бы, совершенно различную природу. В рамках указанных аналогий получим новые результаты, относящиеся как к анализу нелинейных квантовых эффектов в процессах образования и распада частиц в условиях действия сильных электромагнитных полей, так и к определению фотооптических характеристик непроводящих кристаллов под влиянием внешнего поля.

*) Московская государственная геологоразведочная академия