

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.145

ОДНОПЕТЛЕВЫЕ ПОПРАВКИ К ЭНЕРГИИ НЕАБЕЛЕВОГО КАЛИБРОВОЧНОГО ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ 2+1

В. Ч. Жуковский, Н. А. Песков

(кафедра теоретической физики)

Получены точные постоянные решения для полей Янга–Миллса (в классической неабелевой теории поля) с черн-саймоновской топологической массой в 2+1-мерном пространстве-времени. Вычислены однопетлевые вклады бозонных и фермионных флуктуаций в энергию калибровочного поля. Показано, что квантовые флуктуации понижают энергию вакуума калибровочного поля.

В нечетномерных калибровочных теориях имеется возможность ввести в лагранжиан калибровочного поля слагаемое, отвечающее за генерацию массы этого поля, так называемый черн-саймоновский топологический член [1, 2].

Для двумерной $SU(2)$ -глюодиники потенциалов $A_\mu \equiv \tau^a A_\mu^a/2$, где $a = 1, 2, 3$, τ^a — матрицы Паули в цветовом пространстве, лагранжиан массивного калибровочного поля выглядит следующим образом [1]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{\theta}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha} \left(F_{\mu\nu}^a A_\alpha^a - \frac{g}{3}\epsilon^{abc} A_\mu^a A_\nu^b A_\alpha^c \right), \quad (1)$$

где напряженность $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$. Коэффициент θ перед последним слагаемым играет роль массы калибровочного поля. Уравнение Янга–Миллса принимает вид

$$D_\mu^{ac} F^{a\mu\beta} - \frac{\theta}{2}\epsilon^{\beta\mu\nu} F_{\mu\nu}^c = 0,$$

где $D_\mu^{ac} = \delta^{ac}\partial_\mu - g\epsilon^{abc}A_\mu^b$. Последнему уравнению удовлетворяют следующие постоянные потенциалы:

$$A^{a\mu} = \frac{\theta}{2g}\delta^{a\mu}\chi_\omega^{\pm(a)}, \quad (2)$$

где единичный вектор $\chi_\omega^{\pm(a)} = (\pm i, \pm \omega i, \omega)$, а $\omega = \pm 1$.

Для заданного лагранжианом (1) калибровочного поля плотность энергии $E = \mathcal{T}^{00}$ определяется из симметризованного тензора энергии-импульса

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = -\frac{\theta^4}{32g^2}g^{\mu\nu}.$$

Нас не должен смущать знак «минус» перед полученным выражением, т. е. тот факт, что энергия поля отрицательна. Следует отметить, что величина θ является заданной и не подлежит варьированию.

Рассмотрим далее однопетлевой эффективный потенциал

$$V_{\text{eff}} = E + \mathcal{E}_G^{(1)} + \mathcal{E}_Q^{(1)}$$

с учетом вкладов как глюонной $\mathcal{E}_G^{(1)}$, так и кварковой $\mathcal{E}_Q^{(1)}$ петель.

Найдем сначала глюонный вклад в V_{eff} . Представим полное глюонное поле $A^{a\mu}$ в виде фонового поля (2) и квантовых флуктуаций $a^{a\mu}$, т. е. $A^{a\mu} = A^{a\mu} + a^{a\mu}$. Используя фейнмановскую калибровку с фоновым полем (2), получим лагранжиан флуктуаций

$$\mathcal{L}(a_\mu^b | A_\mu^b) = \mathcal{L}(a_\mu^b) - \frac{1}{2}(\partial_\mu a^{b\mu})^2 - \frac{\theta^2}{4}(a^{b\mu})^2 + g\epsilon^{abc}A_\mu^a f^{b\mu\nu}a_\nu^c - g\epsilon^{abc}A_\mu^c a^{b\mu}\partial_\nu a^{a\nu}.$$

Первое слагаемое в правой части — это лагранжиан вида (1) поля a_μ^b , зависящий также от тензора напряженности поля флуктуаций $f_{\mu\nu}^b$.

Спектр энергии глюонов определяется девятью ветвями $\varepsilon_i^2 = \mathbf{p}^2 + \lambda_i\theta^2/2$, где $\lambda_{1,2} = (3 + 2\sqrt{2})^{\pm 1}$, $\lambda_{3,4} = (5 + 2\sqrt{6})^{\pm 1}$, а коэффициенты $\lambda_{5,\dots,9} = -1$ отвечают пятикратно вырожденной ветви спектра тахионных мод.

Однопетлевая поправка к энергии фонового калибровочного поля определяется согласно выражению (см., напр., [3]): $\mathcal{E}_G^{(1)} = \sum_{\mathbf{p},i} \varepsilon_i(\mathbf{p})$. Ввиду наличия тахионных мод мнимая часть энергии флуктуаций оказывается отличной от нуля:

$$\text{Im } \mathcal{E}_G^{(1)} = -\frac{5}{12\sqrt{2}\pi}|\theta|^3.$$

Вещественная часть энергетической поправки расходится. Перенормированное выражение для нее, полученное с помощью представления собственного времени, имеет вид

$$\begin{aligned} \text{Re } \mathcal{E}_G^{(1)\text{ren}} &= \frac{\mu^{2\epsilon}}{4\pi\Gamma(\epsilon - 1/2)} \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{ds}{s^{5/2-\epsilon}} \sum_{i=1}^4 \left\{ \exp\{-s\lambda_i\theta^2/2\} - \left(1 - s\lambda_i\frac{\theta^2}{2}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где μ — константа с размерностью массы. Разность $\text{Re } \mathcal{E}_G^{(1)\text{ren}} \equiv \text{Re } \mathcal{E}_G^{(1)\text{reg}} - \text{Re } \mathcal{E}_G^{(1)\text{div}}$, где $\text{Re } \mathcal{E}_G^{(1)\text{div}}$ является расходящейся в ультрафиолетовом пределе

($s \rightarrow 0$) частью, конечна в пределе $\epsilon \rightarrow 0$. Проводя интегрирование, приходим к выражению для глюонного вклада в эффективный потенциал:

$$V_{\text{eff}} \equiv E + \text{Re } \mathcal{E}_G^{(1)\text{ren}} = -\frac{\theta^4}{32g^2} - \frac{|\theta|^3}{\pi} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{5}{6} \right).$$

Важно заметить, что при обычном представлении в размерной регуляризации для интегралов, подобных входящим в выражение (3) в виде вычитаемого полинома, подразумевается, что они обращаются в нуль [4]. Поэтому можно сказать, что расходящаяся часть эффективного потенциала равна нулю, т.е. $\text{Re } \mathcal{E}_G^{(1)\text{div}} = 0$, а затравочные массы и константы связи не перенормируются. Это согласуется с суперперенормируемостью калибровочных теорий в трехмерном пространстве [2, 5].

Представляет интерес рассмотреть также вклад фермионов в эффективный потенциал. Выберем представление γ -матриц в пространстве $d = 2 + 1$ в виде $\gamma^0 = \sigma^3$, $\gamma^{1,2} = i\sigma^{1,2}$, где σ^i — матрицы Паули. В постановке настоящей задачи возможны два различных состояния кварка, которые отвечают различным цветам в фундаментальном представлении группы $SU(2)$. Спиноры при $d = 3$ являются двухкомпонентными величинами, а спинорные коэффициенты и знак энергии оказываются жестко связанными друг с другом [1, 6]. Энергетический спектр кварков во внешнем поле (2) определяется стационарными решениями уравнения Дирака [3].

Решение уравнения Дирака дает две различные ветви энергетического спектра кварков во внешнем поле (2): $\varepsilon_1^2 = \mathbf{p}^2 + (\tilde{\theta} - m)^2$, $\varepsilon_2^2 = \mathbf{p}^2 + (\tilde{\theta} + m)^2 - 4\tilde{\theta}^2$, где $\tilde{\theta} = \theta/4$. Эти ветви, однако, совпадают, если $m = \tilde{\theta}$, что соответствует равенству нулю эффективной массы кварка в данном поле и восстановлению киральной симметрии. Следует отметить, что в случае, когда $-\tilde{\theta} - 2|\tilde{\theta}| < m < -\tilde{\theta} + 2|\tilde{\theta}|$, в спектре кварков будут присутствовать тахионные моды, поскольку для некоторых значений импульса $\varepsilon_2^2 < 0$.

Ветви спектра энергии отвечают двум различным проекциям изотопического спина частицы на вектор J^a , так что для оператора $\mathbf{J} = J^a \tau^a / 2 = = g\tilde{\theta}^{-1} A^\mu p_\mu - \omega \gamma^0 \tau^3 (p_\mu \gamma^\mu + \tilde{\theta} - m)$ на стационарных решениях уравнения Дирака справедливо равенство $\mathbf{J} \Psi_s = (-1)^s (\tilde{\theta} - m) \Psi_s$ для $s = 1, 2$, где Ψ_s — спинор, являющийся собственным вектором оператора Гамильтона с собственным значением ε_s . При этом для $m = \tilde{\theta}$ имеем $\Psi_1 = \Psi_2$.

Вещественная часть однопетлевого вклада фермионов в энергию вакуума определяется выражением

$$\text{Re } \mathcal{E}_Q^{(1)} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{p} \varepsilon_1 - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{|\mathbf{p}|=p_*}^{\infty} d\mathbf{p} \varepsilon_2,$$

где $p_* = [(\tilde{\theta} - m)(3\tilde{\theta} + m)]^{1/2} \Theta((\tilde{\theta} - m)(3\tilde{\theta} + m))$ есть наименьший импульс, при котором не возникает тахионных мод в спектре энергии кварка. Функция скачка определена так, что $\Theta(x) = 1$ для $x \geq 0$ и $\Theta(x) = 0$ для $x < 0$. Знак «минус» перед вещественной частью возникает благодаря ферми-статистике кварков. В результате находим перенормированное выражение:

$$\begin{aligned} \text{Re } \mathcal{E}_Q^{(1)\text{ren}} = & \frac{1}{6\pi} \left\{ |m - \tilde{\theta}| \left((m - \tilde{\theta})^2 - \frac{3|m|}{4} |m + 3\tilde{\theta}| \right) - \right. \\ & - \frac{|m|}{4} (m - \tilde{\theta})(5m - \tilde{\theta}) + |m|\tilde{\theta}^2 + \\ & \left. + [(m - \tilde{\theta})(m + 3\tilde{\theta})]^{3/2} \Theta((m + \tilde{\theta})^2 - 4\tilde{\theta}^2) \right\}. \end{aligned}$$

При этом вклад кварков имеет противоположный знак по отношению к вкладу глюонов. Мнимая часть, как и в случае глюонов, конечна и отлична от нуля лишь в присутствии в спектре кварков тахионных мод. Окончательное выражение для мнимой части имеет следующий простой вид:

$$\text{Im } \mathcal{E}_Q^{(1)} = -(6\pi)^{-1} |(m - \tilde{\theta})(m + 3\tilde{\theta})|^{3/2} \Theta(4\tilde{\theta}^2 - (m + \tilde{\theta})^2).$$

В частности, для предела нулевой массы кварка $m \rightarrow 0$ получаем

$$\text{Re } \mathcal{E}_Q^{(1)} = |\tilde{\theta}|^3 / (6\pi), \quad \text{Im } \mathcal{E}_Q^{(1)} = -\sqrt{3} |\tilde{\theta}|^3 / (2\pi).$$

Отметим, что вакуумная поправка за счет глюонов отрицательна, т.е. энергия данной конфигурации калибровочного поля остается меньше энергии пертурбативного вакуума. Присутствие тахионных мод в спектре кварков и глюонов приводит к наличию мнимой части в энергии вакуумных флуктуаций, что свидетельствует о неустойчивости данного состояния. Заметим, что учет дополнительных факторов, таких, как конечность области локализации поля, конечных температур, и учет высших петель могли бы привести к стабилизации конфигураций, подобных рассмотренным в настоящей статье.

Литература

1. Deser S., Jackiw R., Templeton S. // Ann. of Phys. (N.Y.) 1982. **140**. P. 372.
2. Jackiw R., Templeton S. // Phys. Rev. 1981. **D23**. P. 2291.
3. Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В. Калибровочные поля. М., 1986.
4. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М., 1988; Trotter H.D. // Phys. Rev. 1991. **D44**. P. 464.
5. Templeton S. // Phys. Rev. 1981. **D24**. P. 3134.
6. Deser S., Jackiw R., Templeton S. // Phys. Rev. Lett. 1982. **48**. P. 975.

Поступила в редакцию
27.11.98