

РЕДУКЦИЯ ИЗМЕРЕНИЙ В НЕЧЕТКОЙ МОДЕЛИ ЭКСПЕРИМЕНТА КАК РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

К. В. Кириллов, А. И. Чуличков

(кафедра компьютерных методов физики)

Решаются задачи оценивания параметров объекта при нечетких ограничениях на координаты векторов шума и входного сигнала в заданных ортонормированных базисах соответствующих пространств.

Рассмотрим типичную математическую модель физического эксперимента, проводимого по линейной схеме измерений:

$$\xi = Af + \nu, \quad (1)$$

где ξ — искаженный шумом ν выходной сигнал Af прибора A , на вход которого поступил сигнал $f \in \mathcal{F}$ от изучаемого объекта и среды, Uf — параметры объекта, интересующие исследователя, $A: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{R}$, $U: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{U}$ — заданные операторы, моделирующие измерительный прибор и связь сигнала f с параметрами объекта, не возмущенного измерением, $\mathcal{R}$, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{U}$ — конечномерные евклидовы пространства. Задача редукции состоит в определении оценки $d(\cdot)\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{U}$ таким образом, чтобы элемент $d(\xi)$ можно было считать наиболее точной версией Uf параметров объекта.

Хорошо известны традиционные теоретико-вероятностные методы решения задачи редукции для моделей $[A, \Sigma]$ и $[A, F, f_0, \Sigma]$, основанные на алгоритмах, минимизирующих среднеквадратичную ошибку интерпретации [1]. В теории возможностей методы оптимального оценивания строятся на использовании аналогичного принципа минимизации необходимости ошибки оценивания. В работе [2] рассмотрена задача оценивания сигнала Uf при нечетких ограничениях на энергию сигналов ν и f . В настоящей работе изучаются задачи оценивания при нечетких ограничениях на координаты векторов ν и f в заданных ортонормированных базисах соответствующих пространств.

1. Редукция экспериментальных данных в случае отсутствия априорной информации о сигнале

Пусть ν — нечеткий элемент $\mathcal{R}$, $\mu^\nu(\cdot): \mathcal{R} \rightarrow [0, 1]$ — его распределение возможности, тогда ξ — тоже нечеткий элемент $\mathcal{R}$, имеющий распределение $\mu^\xi(x, f) = \mu^\nu(x - Af)$, $x \in \mathcal{R}$, зависящее от $f \in \mathcal{F}$ как от параметра. Таким образом, задана модель $[A, \mu^\nu(\cdot)]$ схемы измерения (1), аналогичная схеме $[A, \Sigma]$ в теории вероятностей [1].

Введем нечеткое отношение погрешности $(U \times \mathcal{U}, l(\cdot, \cdot))$, где $l(Uf, u)$ — возможность ошибки при выборе $u \in \mathcal{U}$ в качестве значений параметров объекта Uf . Качество оценки $d(\cdot)$ будем описывать ве-

личиной необходимости ошибки оценивания [2, 3]

$$M(d(\cdot)) = \neg \sup_{x \in \mathcal{R}} \sup_{f \in \mathcal{F}} \min(\mu^\nu(x - Af), \neg l(Uf, d(x))).$$

Оптимальную оценку $d^*(\cdot)$ определим из условия $M(d^*(\cdot)) = \min_{d(\cdot): \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{U}} M(d(\cdot))$.

Рассмотрим нечеткое отношение погрешности вида

$$l(u, v) = l^0(u, v) = \begin{cases} > 0 & u \neq \nu, \\ 0, & u = \nu, \end{cases} \quad u, \nu \in \mathcal{U}.$$

Согласно [2], в этом случае $d^*(x) = Uf^*(x)$, где $f^*(x)$ — оценка максимальной возможности, определяемая как решение задачи

$$\mu^\nu(x - Af^*(x)) = \max_{f \in \mathcal{F}} \mu^\nu(x - Af). \quad (2)$$

Пусть координаты ν_i вектора шума ν , заданные в некотором ортонормированном базисе $\{e_i\}$, $i = 1, \dots, N$, пространства $\mathcal{R}$, независимы, т.е. их распределения $\mu^{\nu_i}(z_i)$ связаны с распределением $\mu^\nu(z)$ вектора ν следующим образом: $\mu^\nu(z) = \min_i \mu^{\nu_i}(z_i)$, $z \in \mathcal{R}$, причем $\mu^{\nu_i}(z_i) = \rho(|z_i|)$, где $\rho(\cdot): \mathcal{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ — строго монотонно убывающая функция. Обозначим $a_i = (A_{i1}, \dots, A_{iK})$ строку матрицы оператора A в ортонормированных базисах $\{e_i\} \subset \mathcal{R}$ и $\{g_j\} \subset \mathcal{F}$. Тогда вместо (2) получим $\min_i \rho(|x_i - (a_i, f^*)|) = \max_f \min_i \rho(|x_i - (a_i, f)|)$, что в силу строго монотонного убывания $\rho(\cdot)$ переходит в задачу вида

$$\max_i |x_i - (a_i, f^*)| = \min_f \max_i |x_i - (a_i, f)|. \quad (3)$$

Т е о р е м а 1. Пусть в схеме измерения (1) $A: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{R}$ — заданный линейный оператор, f — априори произвольный элемент $\mathcal{F}$, ν — нечеткий элемент $\mathcal{R}$, заданный функцией распределения $\mu^\nu(z)$, координаты которого ν_i независимы, причем их распределения $\mu^{\nu_i}(z_i)$ имеют вид $\mu^{\nu_i}(z_i) = \rho(|z_i|)$, где $\rho(|\cdot|)$ — строго монотонно убывающая функция. Тогда оптимальная оценка $d^*(\xi) = Uf^*(\xi)$, где f^* — решение задачи линейного программирования:

$$\begin{cases} (c, y) \sim \min, \\ (y, b_1^i) \geq x_i, \\ (y, b_2^i) \geq -x_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N, \quad (4)$$

$c = (1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{R}_{K+1}$, $y = (u, f_1, \dots, f_K)$, $b_1^i = (1, A_{i1}, \dots, A_{iK})$ и $b_2^i = (1, -A_{i1}, \dots, -A_{iK})$; координаты векторов f и ν , а также элементы матрицы оператора A заданы в некоторых ортонормированных базисах $\{e_i\} \subset \mathcal{R}$ и $\{g_j\} \subset \mathcal{F}$, $j = 1, \dots, K$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $u(f) = \max_i |x_i - (a_i, f)|$. Поскольку для всех i $u \geq |x_i - (a_i, f)|$, функция $u(f)$ может быть определена как решение системы $2N$ неравенств:

$$\begin{cases} u + (a_i, f) \geq x_i, \\ u - (a_i, f) \geq -x_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Вектор f^* , на котором достигается минимальное значение переменной u , удовлетворяющей системе неравенств (5), очевидно, и будет решением исходной задачи (3). Систему (5) можно записать в виде (4), что соответствует стандартному виду задачи линейного программирования. Утверждение теоремы 1 позволяет найти оптимальную оценку Uf^* параметров объекта Uf с помощью известных алгоритмов решения задачи линейного программирования [4].

2. Редукция экспериментальных данных при наличии априорной информации

Вернемся к задаче (1) редукции измерения $\xi = Af + \nu$, в которой теперь шум $\nu \in \mathcal{R}$ и сигнал $f \in \mathcal{F}$ являются независимыми нечеткими элементами с известными функциями распределения $\mu^\nu(\cdot): \mathcal{R} \rightarrow [0, 1]$ и $\mu^f(\cdot): \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, т.е. задана модель $[A, \mu^\nu(\cdot), \mu^f(\cdot)]$ схемы измерения (1), аналогичная модели $[A, F, \Sigma]$ в теории вероятностей [1]. Требуется найти функцию $d(\cdot): \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{U}$ такую, чтобы элемент $d(\xi)$ был наиболее точной версией параметров объекта Uf . Согласно [2, 3], оптимальная оценка $d^*(\cdot) = Ut^*(\cdot)$ определяется как решение задачи на максимум:

$$\mu^{\xi, f}(x, t) \sim \max_{t \in \mathcal{F}} \quad (6)$$

где $\mu^{\xi, f}(x, t) = \min(\mu^{\xi|f}(x|t), \mu^f(t))$ — совместное распределение нечетких элементов ξ и f , $\mu^{\xi|f}(x|t) = \mu^\nu(x - At)$ — условное распределение ξ при условии f , т.е. возможность равенства $\xi = x$ при условии, что $f = t$, $t \in \mathcal{F}$. Аналогично теореме 1 может быть доказана следующая теорема.

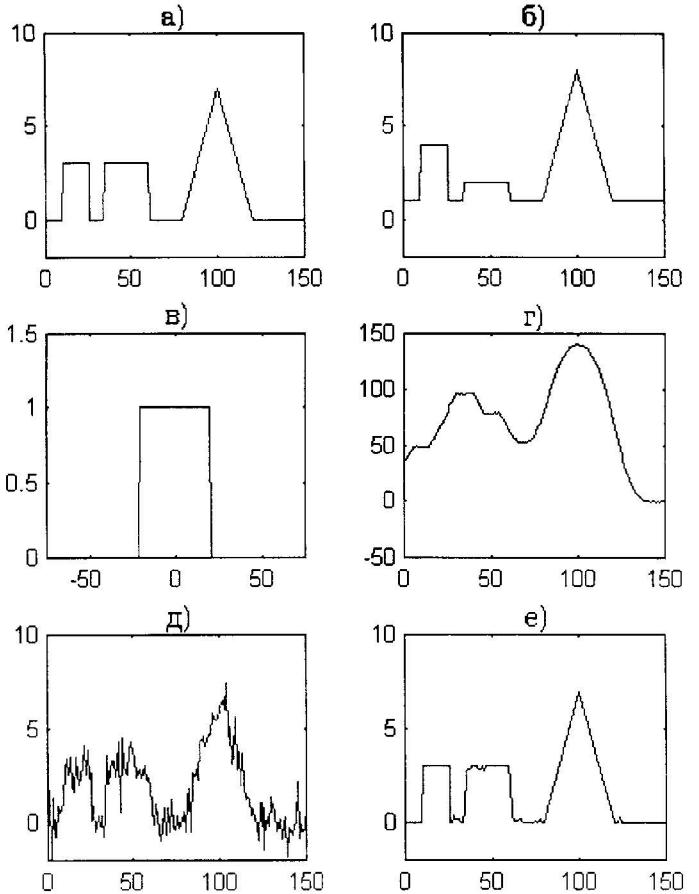
Теорема 2. Пусть в схеме измерения (1) $A: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{R}$ — заданный линейный оператор, $f \in \mathcal{R}$ и $\nu \in \mathcal{F}$ — независимые нечеткие элементы с заданными функциями распределения $\mu^\nu(\cdot): \mathcal{R} \rightarrow [0, 1]$ и $\mu^f(\cdot): \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, причем координаты ν_i и f_i независимы и их распределения имеют вид $\mu^{\nu_i}(z_i) = \rho(|z_i|)$ и $\mu^{f_j}(t_j) = \rho(|f_{0j} - d_{0j} \cdot t_j|)$, где $f_{0j} \in R_1$ и $d_{0j} \in R_1$ — заданные постоянные и $\rho(|\cdot|)$ — строго монотонно убывающая функция. Тогда оптимальная оценка $d^*(\xi) = Ut^*(\xi)$, где t^* — решение задачи линейного программирования:

$$\begin{cases} (c, y) \sim \min, \\ (y, b_1^i) \geq x_i, \\ (y, b_2^i) \geq -x_i, \\ (y, b_3^j) \geq f_{0j}, \\ (y, b_4^j) \geq -f_{0j}, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, K, \quad (7)$$

в которой $c = (1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{R}_{N+1}$, $y = (u, t_1, \dots, t_K)$, $b_1^i = (1, A_{i1}, \dots, A_{iK})$, $b_2^i = (1, -A_{i1}, \dots, -A_{iK})$, $b_3^j = (1, 0, \dots, 0, d_{0j}, 0, \dots, 0) \in \mathcal{R}_{K+1}$, $(b_3^j)_{j+1} = d_{0j}$, $b_4^j = (1, 0, \dots, 0, -d_{0j}, 0, \dots, 0) \in \mathcal{R}_{K+1}$, $(b_4^j)_{j+1} = -d_{0j}$.

Как и в п. 1, задача сводится к обычному виду задачи линейного программирования, решение ее и оптимальная оценка $d^*(x) = Ut^*(x)$ могут быть найдены с помощью известных методов [4].

На рисунке приведен пример использования теоретико-возможностных методов редукции измерений (7) в сравнении с результатами теоретико-вероятностных методов [1].



Теоретико-возможностная редукция измерений (7): а — сигнал f на входе прибора А, б — априорный вид f_0 входного сигнала f , в — аппаратная функция прибора А: $(Af)_i = \sum_{j=1}^K a_{ij} f_j$, г — результаты измерения $\xi = Af + \nu$, д — теоретико-вероятностная редукция измерения $f = (A^*A)^{-1}A^*\xi$, е — теоретико-возможностная редукция измерения (7)

Литература

1. *Пытьев Ю.П.* Методы анализа и интерпретации эксперимента. М., 1990.
2. *Пытьев Ю.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. № 1. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1999. No. 1. P. 1).

3. *Пытьев Ю.П.* // Там же. 1998. № 6. С. 3 (Ibid. 1998. No. 6. P. 1).
4. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М., 1988.

Поступила в редакцию
27.11.98

УДК 519.6

МЕТОД РАСШИРЯЮЩИХСЯ КОМПАКТОВ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ ПРИ УСЛОВИИ ИСТОКОПРЕДСТАВИМОСТИ

А. Г. Ягола, К. Ю. Дорофеев

(кафедра математики)

Показано, что часто используемое в теоретических исследованиях условие истокорпредставимости точного решения операторного уравнения I рода позволяет не только построить оптимальный по порядку точности метод, но и получить апостериорную оценку погрешности. Предлагается метод расширяющихся компактов.

Рассмотрим операторное уравнение

$$Az = u, \quad (1)$$

где A — линейный ограниченный инъективный оператор, действующий из нормированного пространства Z в нормированное пространство U .

Пусть известно, что точной правой части $\bar{u} \in U$ соответствует единственное точное решение $\bar{z} \in Z$, и вместо $\bar{u}$ заданы $u_\delta \in U$ и $\delta > 0$ такие, что $\|u_\delta - \bar{u}\| \leq \delta$. Задача приближенного решения уравнения (1) может быть некорректно поставлена, например, если оператор A вполне непрерывный [1, 2].

Пусть теперь задана следующая априорная информация: точное решение $\bar{z}$ истокоробразно представимо с помощью вполне непрерывного оператора B , действующего из нормированного пространства V в Z :

$$\bar{z} = B\bar{v}. \quad (2)$$

Для простоты будем считать оператор B инъективным, поэтому $\bar{v}$ единственно. Рассмотрим следующий метод решения задачи (1) с априорной информацией (2) по заданным данным $\{u_\delta, \delta\}$: определим функционал

$$\Phi(z) = \|Az - u_\delta\| \quad (3)$$

и множество

$$Z_n = \{z \in Z: z = Bv, v \in V, \|v\| \leq n\}, \quad (4)$$

где n — фиксированное натуральное число.

Рассмотрим следующий алгоритм.

1. Положить $n = 1$.
2. Найти

$$\min_{z \in Z_n} \Phi(z). \quad (5)$$

3. Если

$$\min_{z \in Z_n} \Phi(z) \leq \delta, \quad (6)$$

то перейти к п. 5.

4. Увеличить n на единицу, перейти к п. 2.
5. Положить $n(\delta) = n$ и

$$z_{n(\delta)} = \arg \min_{z \in Z_{n(\delta)}} \Phi(z). \quad (7)$$

Будем рассматривать $z_{n(\delta)}$ как приближенные решения (1).

Заметим, что $z_{n(\delta)} \in Z_{n(\delta)}$ удовлетворяет неравенству

$$\|Az_{n(\delta)} - u_\delta\| \leq \delta \quad (8)$$

и на шаге 3 алгоритма в качестве критерия останова процесса минимизации можно использовать аналогичное неравенство, т.е. если в процессе минимизации $\Phi(z)$ на Z_n найдется $z_n \in Z_n$ такое, что $\|Az_n - u_\delta\| \leq \delta$, то процесс минимизации можно прекратить, положив $n(\delta) = n$ и $z_{n(\delta)} = z_n$.

Т е о р е м а 1. Для любого $\delta > 0$ число $n(\delta)$ конечно. Существует $\delta_0 > 0$ (зависящее, вообще говоря, от $\bar{z}$) такое, что $n(\delta) = n(\delta_0)$ для любого $\delta \in (0, \delta_0]$. Приближенное решение $z_{n(\delta)}$ сходится к точному решению $\bar{z}$ при $\delta \rightarrow 0$, т.е. предложенный метод решения является регуляризирующим по Тихонову.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Шар $V_n = \{v \in V, \|v\| \leq n\}$ — замкнутое ограниченное множество в V . В силу того что оператор B вполне непрерывен, $Z_n = BV_n$ — компакт в Z для любого n . Поэтому по теореме Вейерштрасса (см., напр., [2]) непрерывный функционал $\Phi(z) = \|Az - u_\delta\|$ достигает своей точной нижней грани на Z_n в (возможно, не единственной) точке $z_n \in Z_n$.

Конечность и существование $\delta_0 > 0$ такого, что $n(\delta) = n(\delta_0)$ для любого $\delta \in (0, \delta_0]$, следует из того, что $\bar{z} = B\bar{v} \in Z_N$, где

$$N = \begin{cases} \|\bar{v}\|, & \text{если } \|\bar{v}\| \text{ — натуральное число;} \\ \lceil \|\bar{v}\| \rceil + 1, & \text{если } \|\bar{v}\| \text{ — не натуральное число.} \end{cases}$$