УДК 537.84

ЭВОЛЮЦИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ КОНФИГУРАЦИЙ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЗАДАЧЕ ДИНАМО СРЕДНИХ ПОЛЕЙ В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

А. А. Быков, В. Ю. Попов

(*кафедра математики*)

Выведены приближенные выражения для скорости дрейфа переходного слоя и времени жизни нестационарной контрастной структуры в задаче генерации магнитного поля в турбулентной среде.

Введение

В соответствии с общепринятыми представлениями магнитное поле в спиральных галактиках создается за счет действия *процесса галактического динамо* [1, 2]. При этом часть кинетической энергии хаотического движения проводящего вещества преобразуется в энергию магнитного поля. В тонком галактическом диске вектор магнитного поля может быть представлен в виде $\mathbf{B} = \mathbf{b}(\mathbf{r})u(\mathbf{r}, t)$. Векторная функция $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ задает направление магнитного поля, а скалярная функция $u(\mathbf{r}, t)$ определяет напряженность. Функция $u(\mathbf{r}, t)$ определяется из уравнения диффузии, в котором присутствуют дополнительные члены, отвечающие за перенос поля вместе с движением вещества и генерацию:

$$u_t + \mathbf{V} \bigtriangledown u = \mu \bigtriangleup u + \gamma(u)u. \qquad (1)$$

Если плотность энергии магнитного поля оказывается сравнимой со средней плотностью кинетической энергии, коэффициент размножения $\gamma(u)$ становится равным нулю, поэтому выражение для коэффициента размножения $\gamma(u) = \gamma_0 \left(1 - u^2/U^2\right)$ можно принять в качестве достаточно хорошей аппроксимации, если не учитывать в (1) другие эффекты, и в частности нелокальный перенос поля за счет выхода силовых линий за пределы галактического диска. Для типичных галактик (например, M51 и M81) μ практически равно 0,0016, если измерять время в миллиардах лет, расстояние в килопарсеках. Коэффициент генерации γ_0 порядка 2–5 [3, 4]. Характерный размер неоднородностей крупномасштабного магнитного поля $\delta = \sqrt{\mu/\gamma_0}$ примерно на два порядка меньше диаметра диска, поэтому уравнение (1) проявляет специфические свойства *уравнений с малым параметром при старших производных* и его решение относится к классу функций, которые принято называть *контрастными структурами* [5, 6].

Контрастные структуры (КС) — это своеобразные конфигурации, которые могут образовываться в процессе эволюции физических полей различной природы в нелинейном режиме. В КС обширные области медленного изменения поля (мы их для краткости называем пятнами) разделяются малыми по объему областями быстрого его изменения. Большой интерес с теоретической и практической точек зрения представляют КС, образующиеся в результате ограничения поля определенным уровнем насыщения, как это имеет место для магнитного поля в спиральной галактике. В типичной ситуации положительное или отрицательное поле возрастает по модулю до уровня насыщения, а на границе положительного и отрицательного полей образуется тонкий *внутренний переходный слой* (ВПС), внутри которого поле меняет знак. Переходный слой медленно перемещается в результате совместного действия диффузии, переноса, генерации. В настоящее время детально изучены стационарные КС и разработаны методы анализа их устойчивости [5–7]. В то же время наблюдения галактик и компьютерный эксперимент [3, 4] убеждают в существовании *долгоживущих* нестационарных КС, которые в процессе эволюции могут постепенно трансформироваться в стационарное состояние или разрушаться. Законы эволюции неустойчивых КС практически не изучены. Эволюция КС определяется конфигурацией пятен различной полярности, неоднородностью уровня насыщения, кривизной ВПС и т.д.

Цель настоящей работы — исследовать влияние *соотношения размеров пятен КС различной полярности* на время жизни неустойчивых нестационарных контрастных структур магнитного поля в спиральных галактиках. Мы вычислим приближенно скорость дрейфа ВПС и время жизни КС с заданной начальной конфигурацией. Поскольку уравнение (1) адекватно описывает не только магнитное поле в спиральных галактиках, но и поле в турбулентной проводящей среде, некоторые задачи химической кинетики, динамику популяций и т.д., полученные далее результаты имеют достаточно общий характер.

1. Одномерная модель

Рассмотрим одномерную по пространству задачу Коши для уравнения диффузии с переносом и размножением:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma(u)u, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \qquad (2)$$

$\gamma(u) = \gamma_0 \left(1 - u^2/U^2\right)$, с начальными условиями $u(x, 0) = u_0(x)$ и граничными условиями при $|x| \to \infty$, обеспечивающими ограниченность решения на всей прямой. Пусть в начальный момент времени в среде имеется хаотическое мелкомасштабное магнитное поле, напряженность которого много

меньше уровня насыщения, $|u_0| \ll U$. За счет диффузионного члена мелкомасштабные неоднородности $u_0(x)$ будут быстро сглажены, и функция $u(x,t)$ примет вид набора хаотически расположенных пятен положительной и отрицательной полярности. Затем за счет процесса генерации величина u внутри пятен вырастет до величины, несколько меньшей уровня насыщения U, на границе пятен положительной и отрицательной полярности образуется ВПС, после чего конфигурация решения в целом может быть описана как КС. В дальнейшем каждый ВПС перемещается, причем направление движения, вообще говоря, таково, что узкие пятна уменьшаются, а широкие увеличиваются.

Проведя линейную замену переменных x, t и функции u, приведем уравнение (2) к безразмерному виду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u^2), \tag{3}$$

где $\delta = \sqrt{\mu/\gamma_0}$ — толщина ВПС. Сначала рассмотрим стационарные решения типа КС.

2. Стационарные контрастные структуры

Напряженность поля в стационарной одномерной КС можно найти из уравнения $\delta^2 d^2u/dx^2 + u(1-u^2) = 0$. Точное решение выражается через неполный эллиптический интеграл первого рода $F(\phi,k) = \int\limits_0^{\phi} \left(1 - k^2 \sin^2\phi\right)^{-1/2} d\phi$:

$$\begin{gathered} \frac{x - x_0}{\delta} = \frac{\sqrt{2}}{a} F(\phi,k), \\ \phi = \arcsin\left(\frac{u}{b}\right), \quad k = \frac{b}{a}, \end{gathered} \tag{4}$$

x_0 — координата центра ВПС, $a = \sqrt{1+\sqrt{1-C}}$, $1 \leqslant a < 2$, $b = \sqrt{1-\sqrt{1-C}}$, $0 \leqslant b < 1$, константа C определяет наклон кривой $u(x)$ в центральной точке: $(du/dx)_{x=x_0} = (1/\delta)\sqrt{C/2}$.

Если $0 < C < 1$, то $u(x)$ — периодическая функция, период T равен

$$T = \delta \frac{4\sqrt{2}}{a} K\left(\frac{b}{a}\right), \tag{5}$$

где $K(k) = F(\pi/2, k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Величина T лежит в пределах $2\pi\delta < T < \infty$, причем $T \to \infty$ при $C \to 1$, $C < 1$ и $T \to 2\pi\delta$ при $C \to 0$, $C > 0$. Максимальное значение $u_{\max} = b$ достигается при $x - x_0 = T/4$, минимальное значение $u_{\min} = -b$ при $x - x_0 = 3T/4$.

Пусть ширина положительного пятна $W = T/2$ много больше δ и соответственно $1 - C \ll 1$, так что $k \simeq 1$. Используем асимптотическое разложение эллиптического интеграла для случая $k < 1$, $k \to 1$: $K(k) = \ln\left(4/\sqrt{1-k^2}\right)$ [8]. Подставляя это выражение в (5), получим приближенное выражение для W:

$$W = \frac{T}{2} = \frac{\delta}{\sqrt{2}} \ln \frac{64}{1-C}. \tag{6}$$

Полезно определить диапазон изменения параметров в (6), в пределах которого можно использовать эти соотношения, не нарушая условий существования периодического решения. Минимально допустимое значение C можно вычислить из соотношения для минимально возможного периода $T_{\min} = 2\pi\delta$. Соответствующее значение $C_{\min} = 1 - 64\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\pi} \approx 0{,}246$.

В критическом случае $C = 1$, $u(x)$ — монотонная функция, обращающаяся в нуль в одной точке $x = x_0$:

$$u = \mathrm{th}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x - x_0}{\delta}\right). \tag{7}$$

В соответствии с общепринятой классификацией это решение относится к КС типа «ступенька» [7]. Если $C > 1$, то решение не ограничено и не представляет интереса.

3. Квазистационарные контрастные структуры

Квазистационарная одномерная КС состоит из последовательности пятен чередующейся полярности (положительной и отрицательной), разделенных ВПС, при этом начальная ширина каждого пятна много больше толщины ВПС. Чтобы оценить время жизни нестационарной КС, рассмотрим эволюцию периодической системы положительных и отрицательных пятен, $u(x+T,t) = u(x,t)$, причем у положительного пятна начальная ширина несколько больше, чем у отрицательного. В пределах одного периода $u(x,t)$ образуются два ВПС, каждый из которых будет *медленно* дрейфовать в сторону более узкого пятна, в результате чего ширина положительного пятна будет увеличиваться, а изначально меньшая ширина отрицательного пятна будет уменьшаться. Когда ширина пятна становится сравнимой с толщиной ВПС, происходит лавинообразное разрушение КС, которая на этом этапе уже не является квазистационарной.

Возможны разные режимы эволюции КС с широкими ($W > \pi\delta$) пятнами обоих знаков. Рассмотрим только сильно асимметричные КС, для которых ширина положительного пятна много больше ширины соседних с ним отрицательных пятен. Предположим, что *внутри ВПС*, $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, в каждый фиксированный момент времени функцию $u(x,t)$ можно приближенно описать выражением (7), причем координата центральной точки будет медленно перемещаться с некоторой скоростью $v(t)$, которая зависит от ширины каждого из пятен: $u(x,t) = f(x - vt)$, $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$. Предположим, что выражение (4), определяющее стационарное периодическое решение, можно использовать и для непериодического нестационарного решения *вне ВПС*, т.е. для положительного и отрицательного пятна *по отдельности*. Для каждого из них будем использовать разные значения константы C,

которая теперь будет функцией t (каждое из этих значений мало отличается от критического значения $C = 1$). Соответствующие значения параметров a, b также будут отличаться. Ширину положительного и отрицательного пятен обозначим $W^{(+)}(t)$ и $W^{(-)}(t)$, причем $W^{(+)}(t) + W^{(-)}(t) = T$. Таким образом, внутри одного периода КС выделены три области, в которых решение представляется разными формулами.

Вычислим скорость дрейфа ВПС. Проинтегрируем (3) по интервалу $x_0 - W^{(-)}/2 < x < x_0 + W^{(+)}/2$, который включает в точности один ВПС. Используя условие $\pi\delta \ll W^{(-)} \ll W^{(+)}$, получим $v \simeq -\delta \cdot 8\sqrt{2}\exp\{-\sqrt{2}W^{(-)}/\delta\}$. Так как уменьшение ширины отрицательного пятна обусловлено одновременным дрейфом двух ВПС навстречу друг другу с равными скоростями, ширину отрицательного пятна можно найти из дифференциального уравнения $dW^{(-)}/dt = -2v$. Нетрудно получить *точное* решение этого уравнения: $W^{(-)}(t) = \delta \cdot 2^{-1/2}\ln[-32(t - t_0)]$. Выберем t_0 так, чтобы в этот момент времени ширина отрицательного пятна была равна половине критического значения периода $W^{(-)}(t_0) = \pi\delta$: $t_0 = (\mathrm{e}^{\sqrt{2}\pi})/32 \approx 2{,}657$. Учитывая, что в используемом приближении ширина каждого из пятен не может быть меньше $\pi\delta$, момент времени t_0 можно интерпретировать как момент перехода от медленной стадии эволюции КС к ее лавинообразному расширению. Теперь выражение для зависимости ширины пятна от времени приобретает вид, пригодный для сравнения с компьютерным экспериментом:

$$W(t) = \delta \cdot 2^{-1/2}\ln\left(-32t + \mathrm{e}^{\sqrt{2}\pi}\right). \qquad (8)$$

Здесь $t \leqslant 0$, и момент времени $t = 0$ соответствует полному разрушению КС. Соотношение (8) можно использовать и для вычисления времени жизни КС с заданной начальной шириной пятна отрицательной полярности W:

$$t = \frac{1}{32}\left[\exp\left\{\sqrt{2}\pi\right\} - \exp\left\{\sqrt{2}\frac{W}{\delta}\right\}\right]. \qquad (9)$$

Предполагается, что в начальный момент времени ширина пятна положительной полярности много больше W. То же самое выражение можно, очевидно, использовать и для времени жизни уединенного пятна с начальной шириной W, так как этот случай можно получить предельным переходом $W = \mathrm{const}$, $T \to \infty$.

Поскольку напряженность магнитного поля удовлетворяет уравнению весьма общего вида (3), полученные оценки для скорости дрейфа и времени жизни применимы к широкому классу задач, в которых некоторое физическое поле $u(x,t)$ участвует в процессах переноса, диффузии и размножения, причем толщина переходного слоя мала по сравнению с размерами области.

4. Результаты компьютерного моделирования

Для определения пределов применимости формул (9) и (8) мы использовали метод компьютерного моделирования. На рис. 1 показана эволюция несимметричной нестационарной КС, для которой в начальный момент времени $W^{(-)} = 2{,}5\pi\delta$ и $W^{(+)} = 3{,}5\pi\delta$. Для простоты мы выбрали параметры $\mu = 1$, $\gamma_0 = 1$. Представлена серия «моментальных фотографий» графика $u(x,t)$ в пределах одного периода. Интервал времени между двумя последовательными снимками $\Delta t = 50$. Полное время жизни пятна равно 1650. Координата x отложена по горизонтальной оси в единицах δ. Горизонтальные линии $u = 1$ и $u = -1$ соответствуют уровню насыщения. На начальной стадии КС квазистационарна, ВПС медленно перемещается, ширина отрицательного пятна убывает и ширина положительного возрастает. В тот момент, когда ширина более узкого пятна сравнивается с критической ($W^{(-)} \approx \pi\delta$), начинается быстрый процесс разрушения КС.

Зависимость времени жизни асимметричной конфигурации магнитного поля с широким положительным пятном ($W^{(+)} = 10\pi\delta$) от ширины отрицательного пятна показана на рис. 2. По горизонтальной оси отложено отношение ширины отрицательного пятна в начальный момент времени $W^{(-)}(t_0)$ к критическому значению $W_0 = \pi\delta$. Фиксировался момент времени, когда отрицательное пятно полностью исчезает и функция u в пределах одного периода становится положительной. По вертикальной оси отложен десятичный логарифм времени жизни. Очевидно, что график $t(W)$ неотличим от прямой линии. Угол наклона по графику рис. 2 определяется из соотношения $\mathrm{tg}\,\psi \approx 1{,}912$, где $\mathrm{tg}\,\psi = (\lg t_2 - \lg t_1)/(W_2/W_0 - W_1/W_0)$. Приближенная формула (9) дает значение $\mathrm{tg}\,\psi = \pi\sqrt{2}/\ln 10 \approx 1{,}92952$. Таким образом, погрешность, даваемая формулой (9), составляет $\sim 1\%$,

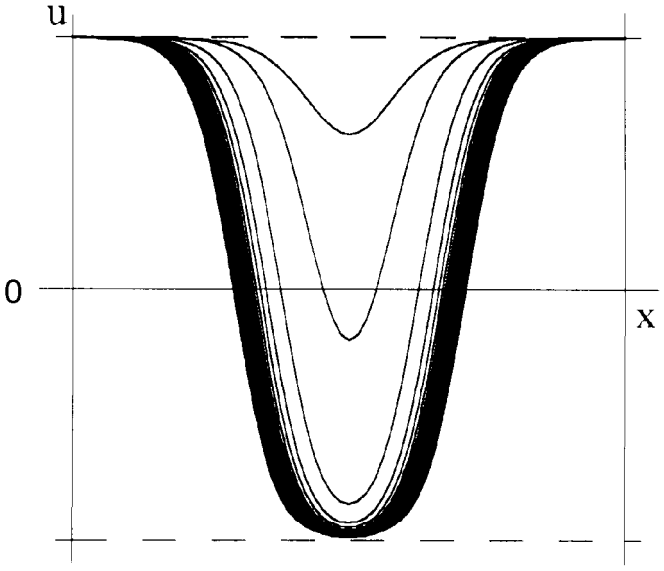

Рис. 1. Эволюция несимметричной контрастной структуры: начальная ширина отрицательного пятна $W^{(-)} = 2{,}5\pi\delta$, положительного — $W^{(+)} = 3{,}5\pi\delta$

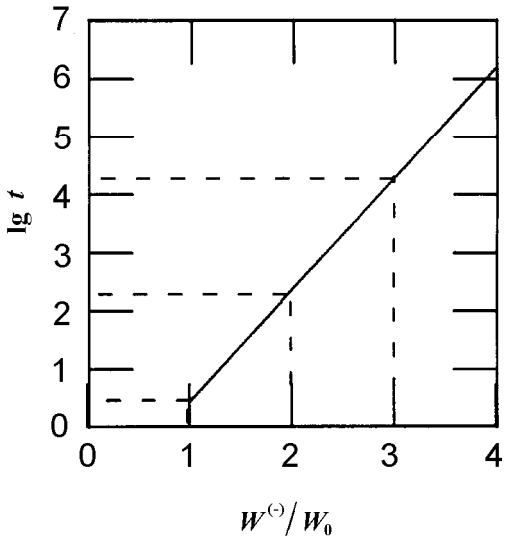

Рис. 2. Время жизни t контрастной структуры с заданной шириной пятна как функция отношения ширины пятна в начальный момент времени $W^{(-)}(t_0)$ к критическому значению $W_0 = \pi\delta$

поэтому приближенными формулами для скорости дрейфа ВПС и времени жизни КС можно пользоваться не только для случая широких пятен КС, но и при менее жестких ограничениях: $W^{(+)} \gg W^{(-)}$, $W^{(-)} > \pi\delta$. Более подробный анализ результатов компьютерного моделирования показывает, что погрешность формулы для времени жизни не превышает 1%. Из рис. 2 видно, что КС живет практически бесконечно большое время: $t > 10\,000$, если ширина обоих пятен (положительного и отрицательного) превышает критическую ширину $\pi\delta$ не менее чем в три раза. Если ширина пятна превышает критическую только в два раза, время жизни КС уменьшается в 30 раз. Наконец, пятно с толщиной порядка критической разрушается практически мгновенно. Эти результаты подтверждают предположение о лавинообразном характере процесса разрушения КС на поздней стадии, которая начинается, когда толщина пятна становится сравнимой с критическим значением.

Оценим время жизни КС магнитного поля в спиральных галактиках. Типичные параметры [3, 4] (в единицах длины 1 кпк и времени $5 \cdot 10^8$ лет, галактики M51, M81) $\mu = 0{,}0016$, $\gamma_0 = 4$, толщина ВПС порядка $\delta = 0{,}2$ кпк, что примерно в 100 раз меньше радиуса галактики $d = 20$ кпк. Формула (9) показывает, что в однородной среде с нулевой скоростью вещества ($\mathbf{V} = 0$) трудно ожидать наличия контрастных образований размером меньше $2\pi \cdot 0{,}2$ кпк $\simeq 1{,}2$ кпк (время их жизни меньше времени одного оборота галактики), но вполне возможно существование КС размером порядка $d \geqslant 1$кпк. Разумеется, направленное крупномасштабное движение вещества, которое в спиральных галактиках представлено дифференциальным вращением, приведет к более быстрому разрушению контрастных пятен магнитного поля за счет вытягивания и истончения, но рассмотрение этого эффекта выходит за рамки данной работы.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 95-01-01284а и 98-01-00356).

Авторы благодарны А. Б. Васильевой, В. Ф. Бутузову, Д. Д. Соколову и А. Шукурову за полезные обсуждения.

Литература

1. *Краузе Ф., Рэдлер К.-Х.* Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. М., 1984.
2. *Ruzmaikin A.A., Shukurov A.M., Sokoloff D.D.* Magnetic Fields of Galaxies. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1988.
3. *Poezd A.D., Shukurov A.M., Sokoloff D.D.* // Month. Not. of RAS. 1993. **264**. P. 285.
4. *Beck R., Brandenburg A., Moss D.* et al. // Astron. Astrophys. 1996. **34**. P. 153.
5. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М., 1990.
6. *Васильева А.Б.* // Матем. моделирование. 1991. **3**, №4. С. 114.
7. *Васильева А.Б.* // ЖВМ и МФ. 1995. **35**, №4. С. 520.
8. *Янке Э., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М., 1968.

Поступила в редакцию
17.04.98

УДК 530.12

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ ВИССЕРА

М. М. Карецкий

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Найдено новое точное решение уравнений теории гравитации с массивным гравитоном в случае, когда источником гравитационного поля является плоская электромагнитная волна.

Можно ли присвоить гравитону массу? Имеет ли вообще смысл говорить о массивном гравитоне? Такие вопросы ставит Виссер (Visser) в своей работе [1]. Как известно из общей теории относительности Эйнштейна, гравитон должен быть безмассовым. Но астрофизические данные допускают [2] существование гравитона с массой

$$m_g < 2 \cdot 10^{-29}\ \text{эВ} \approx 2 \cdot 10^{-38} m_{\text{nucl}} \approx 3 \cdot 10^{-66}\ \text{кг}.$$