РАДИОФИЗИКА

УДК 517.926

ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ГЕНЕРАТОРЕ ВАН ДЕР ПОЛЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В. Ф. Камбулов*⁾, А. Ю. Колесов*⁾, Н. Х. Розов

(*кафедра дифференциальных уравнений*)

Исследуется математическая модель распределенного аналога генератора Ван дер Поля, представляющая собой линейную систему телеграфных уравнений с нелинейностью в одном из граничных условий. В результате теоретического исследования выявляется феномен буферности, т. е. одновременное существование у рассматриваемой краевой задачи нескольких устойчивых периодических режимов. Приводятся результаты эксперимента, подтверждающего физическую реализуемость данного феномена.

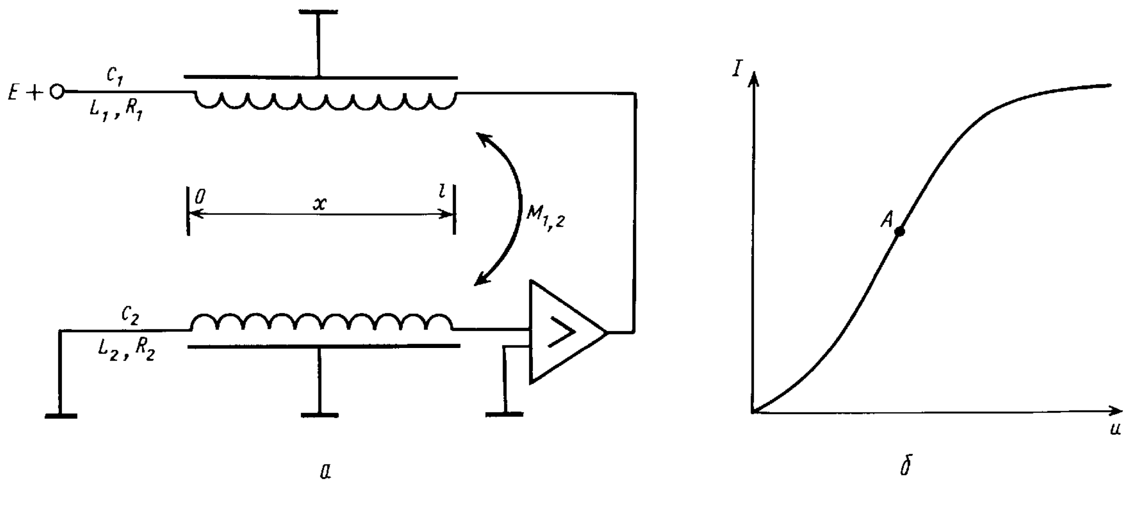
Автогенераторы с распределенными параметрами (АРП) привлекают интерес исследователей в связи с интенсивным развитием микроэлектроники и появившейся возможностью их реализации. В частности, актуальна проблема создания АРП, «подобных» уже известным генераторам на сосредоточенных элементах. Например, в работах [1, 2] предложена и изучена математическая модель АРП, представляющего собой аналог классического одноламповего генератора Ван дер Поля с колебательным контуром в цепи сетки [3].

В настоящей работе, продолжающей исследования [1, 2], проводится теоретический анализ автоколебательных процессов в АРП-аналоге генератора Ван дер Поля с колебательным контуром в цепи анода [3]. Полученные выводы иллюстрируются результатами специального эксперимента.

1. Рассмотрим АРП, принципиальная блок-схема которого показана на рис. 1,*а*. Его характерная особенность состоит в том, что он имеет две линии, параметры каждой из которых (индуктивность L_j, емкость C_j и активное сопротивление R_j, $j=1,2$) равномерно распределены на некоторых отрезках проводников одной и той же длины l (в обоих случаях пренебрегаем распределенной проводимостью). Считаем также, что между линиями существует взаимная индукция, характеризующаяся коэффициентами M_j, $j=1,2$. Будем предполагать, что в нелинейном элементе (в простейшем случае — в классической лампе) ток I зависит от приложенного напряжения u так, как показано на рис. 1,*б*.

Обозначим через u_j, i_j, $j=1,2$, переменные составляющие напряжения и силы тока в линиях. Как известно, они связаны системой телеграфных уравнений:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -R_1 i_1 - L_1\frac{\partial i_1}{\partial t} + M_1\frac{\partial i_2}{\partial t},\quad \frac{\partial i_1}{\partial x} = -C_1\frac{\partial u_1}{\partial t},$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = -R_2 i_2 - L_2\frac{\partial i_2}{\partial t} + M_2\frac{\partial i_1}{\partial t},\quad \frac{\partial i_2}{\partial x} = -C_2\frac{\partial u_2}{\partial t}. \tag{1}$$



а *б*

Рис. 1

*⁾ Ярославский государственный университет.

В нашем случае систему следует рассматривать на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$, дополнив граничными условиями:

$$u_1|_{x=0} = 0, \quad u_2|_{x=0} = 0,$$
$$i_1|_{x=l} = \left(s_0 u_2 + s_1 u_2^2 - s_2 u_2^3\right)|_{x=l}, \quad i_2|_{x=l} = 0, \tag{2}$$

где $s_0 > 0$, $s_2 > 0$, а знак s_1 произволен.

Поясним происхождение граничных условий (2). К первому из них приходим в предположении, что источник постоянного напряжения $+E$ «шунтирован» достаточно большой емкостью и, следовательно, первая линия имеет на конце $x = 0$ нулевое значение переменной составляющей напряжения. Второе условие — следствие заземленности второй линии в точке $x = 0$, а последнее вытекает из допущения идеальности усилителя (наличия у него бесконечно большого входного активного сопротивления). Наконец, фигурирующее в (2) нелинейное условие объясняется тем, что характеристика нелинейного элемента, связывающего две рассматриваемые линии, аппроксимируется в окрестности рабочей точки A (см. рис. 1,*б*) кубическим полиномом с коэффициентами s_j, $j = 0, 1, 2$.

Краевая задача (1), (2) представляет собой общую математическую модель автогенератора, содержащего две LCR-линии, между которыми существует взаимная индукция, и нелинейный элемент. Однако ниже мы будем изучать лишь случай $C_2 = 0$, который можно рассматривать как математическую модель АРП-аналога классического генератора Ван дер Поля с колебательным контуром в цепи анода [3]. Отметим, что первая линия играет здесь роль «колебательного контура в цепи анода». Вторая линия вспомогательная, так как при $C_2 = 0$ автоматически получаем $i_2 \equiv 0$, т. е. она создает (посредством взаимной индукции) цепь обратной связи между основной линией и усилителем.

Итак, исследуется краевая задача

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -R_1 i_1 - L_1 \frac{\partial i_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial i_1}{\partial x} = -C_1 \frac{\partial u_1}{\partial t},$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = M_2 \frac{\partial i_1}{\partial t}, \tag{3}$$
$$u_1|_{x=0} = u_2|_{x=0} = 0,$$
$$i_1|_{x=l} = \left(s_0 u_2 + s_1 u_2^2 - s_2 u_2^3\right)|_{x=l},$$

получающаяся из задачи (1), (2) при $i_2 = 0$. Для удобства ее анализа сначала исключим переменную u_2:

$$u_2 = -\frac{M_2}{L_1} u_1 - \frac{M_2 R_1}{L_1} \int\limits_0^x i_1(t, s)\,ds. \tag{4}$$

После выполнения в равенствах (3), (4) замен $x/l \to x$, $t/(l\sqrt{L_1 C_1}) \to t$, $u_1 = u$, $i_1 = v\sqrt{C_1/L_1}$ интересующая нас математическая модель принимает вид

$$u_t = -v_x, \quad v_t = -u_x - \varepsilon v,$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=1} + \beta_0 \sigma + \beta_1 \sigma^2 - \beta_2 \sigma^3 = 0, \tag{5}$$

где

$$\sigma = u|_{x=1} + \varepsilon \int\limits_0^1 v(t, x)\,dx, \quad \varepsilon = l R_1 \sqrt{C_1/L_1},$$

$$\beta_0 = s_0 \alpha \sqrt{L_1/C_1}, \quad \beta_1 = -s_1 \alpha^2 \sqrt{L_1/C_1},$$

$$\beta_2 = s_2 \alpha^3 \sqrt{L_1/C_1}, \quad \alpha = M_2/L_1.$$

В качестве фазового пространства (пространства начальных условий $(u(x),\, v(x))$) краевой задачи (5) возьмем нелинейное многообразие Σ в гильбертовом пространстве $W_2^1([0,1]; R^2)$, состоящее из вектор-функций, компоненты которых удовлетворяют граничным условиям из (5). Напомним, что понятие фазового пространства позволяет обычным образом определять основные понятия математической теории колебаний. Отметим также, что единственность решения отвечающей (5) смешанной задачи с начальными условиями из Σ получается стандартно: достаточно линейную систему уравнений из (5) проинтегрировать по характеристикам, а затем результат подставить в указанные там же граничные условия.

2. Периодические по t решения краевой задачи (5) исследуем при дополнительных предположениях:

$$\beta_0 = \varepsilon/2 + \gamma \varepsilon^2, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 1, \tag{6}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, а параметр $\gamma > 0$ — величина порядка единицы. Первое из условий (6) обусловлено чисто математическими причинами (см. ниже). Допущение $\beta_1 = 0$, означающее симметричность нелинейной характеристики, сделано лишь для простоты, так как все полученные здесь результаты сохраняются и при $\beta_1 \neq 0$. Наконец, третье из равенств (6), а именно $\beta_2 = 1$, легко выполняется при введении подходящей нормировки переменных u, v.

Подставляя в соотношения (5) равенства (6) и сохраняя во втором граничном условии из (5) только существенные для дальнейшего слагаемые, приходим к краевой задаче

$$u_t = -v_x, \qquad v_t = -u_x - \varepsilon v,$$
$$u|_{x=0} = 0, \tag{7}$$
$$v|_{x=1} + \left(\frac{\varepsilon}{2} + \gamma \varepsilon^2\right) u|_{x=1} + \frac{\varepsilon^2}{2} \int\limits_0^1 v\,dx - u^3|_{x=1} = 0.$$

Для построения периодических по t решений краевой задачи (7) воспользуемся методом бесконечномерной нормализации, представляющим собой специальный вариант асимптотического метода Крылова–Боголюбова–Митропольского (см., напр., [4]) и смыкающимся в алгоритмическом плане с методом квазинормальных форм Ю. С. Колесова (см., напр., [5, 6]).

С этой целью подставим в краевую задачу (7) ряды

$$u=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k+1}u_k(t,\tau,x),\quad v=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k+1}v_k(t,\tau,x),\quad (8)$$

где $\tau=\varepsilon^2 t$, все коэффициенты являются 4-периодическими по t,

$$\begin{gathered}u_0=\sum_{n=1}^{\infty}\left[z_n(\tau)\exp(i\omega_n t)+\overline{z}_n(\tau)\exp(-i\omega_n t)\right]\times\\ \times(-1)^{n-1}\sin(\omega_n x),\\ v_0=i\sum_{n=1}^{\infty}\left[z_n(\tau)\exp(i\omega_n t)-\overline{z}_n(\tau)\exp(-i\omega_n t)\right]\times\\ \times(-1)^{n-1}\cos(\omega_n x)\end{gathered}\quad (9)$$

(где черта — знак комплексного сопряжения), $\omega_n=\pi(2n-1)/2$, $n=1,2,\ldots$, а комплексные «амплитуды» z_n таковы, что сходится ряд с общим членом $\omega_n^2|z_n|^2$ (в этом случае $u_0,v_0\in W_2^1$ по переменной x). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, последовательно определяем $u_j,v_j,\,j=1,2$, и неизвестные амплитуды $z_n, n=1,2,\ldots$. Специально подчеркнем, что отыскание периодических решений краевой задачи (7) в виде (8) вполне естественно, так как формулы (9) (при фиксированном τ) задают произвольное периодическое решение линейной краевой задачи, получающейся из краевой задачи (7) при $\varepsilon=0$ после отбрасывания нелинейности.

На первом шаге описанного алгоритма приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=-\frac{\partial v_1}{\partial x},\quad \frac{\partial v_1}{\partial t}=-\frac{\partial u_1}{\partial x}-v_0,$$

$$u_1|_{x=0}=0,\quad v_1|_{x=1}+\frac{1}{2}u_0|_{x=1}=0,$$

решение которой будем искать в виде

$$u_1=\sum_{n=1}^{\infty}\left[z_nA_n(x)\exp(i\omega_n t)+\overline{z}_n\overline{A}_n(x)\exp(-i\omega_n t)\right],$$

$$v_1=\sum_{n=1}^{\infty}\left[z_nB_n(x)\exp(i\omega_n t)+\overline{z}_n\overline{B}_n(x)\exp(-i\omega_n t)\right].$$

На этом пути для A_n, B_n получаем линейные неоднородные краевые задачи, разрешимость которых обеспечивает слагаемое $(\varepsilon/2)u|_{x=1}$ во втором граничном условии из (7). Таким образом, становятся понятны мотивы специального предположения в (6) относительно коэффициента усиления β_0. Несложный анализ только что упомянутых краевых задач приводит к равенствам

$$A_n=-\frac{i}{2}(-1)^{n-1}x\cos\omega_n x,\quad (10)$$

$$B_n=\frac{i}{\omega_n}\left[A_n'(x)+i(-1)^{n-1}\cos\omega_n x\right],\quad n=1,2,\ldots.$$

На втором шаге после исключения переменной v_2 имеем дело с краевой задачей

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u_2=-2\frac{\partial^2 u_0}{\partial t\partial\tau}-\frac{\partial u_1}{\partial t},$$

$$u_2|_{x=0}=0,\quad \frac{\partial u_2}{\partial x}|_{x=1}=\frac{d}{dt}\left(\gamma u_0|_{x=1}-u_0^3|_{x=1}\right),$$

решение которой ищем в виде

$$u_2=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n(x)\exp(i\omega_n t)+\overline{C}_n(x)\exp(-i\omega_n t)\right].$$

Нетрудно проверить, что с учетом равенств (10) для определения функций C_n, $n=1,2,\ldots$, получаются краевые задачи

$$\begin{gathered}C_n''+\omega_n^2C_n=\\ =(-1)^{n-1}\left(2i\omega_n\frac{dz_n}{d\tau}\sin\omega_n x+\frac{\omega_n}{2}z_nx\cos\omega_n x\right),\\ C_n(0)=0,\quad C_n'(0)=i\omega_n f_n,\end{gathered}\quad (11)$$

где f_n — коэффициент при гармонике $\exp(i\omega_n y)$ ряда Фурье функции $\gamma w(\tau,y)-w^3(\tau,y)$,

$$w(\tau,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[z_n(\tau)\exp(i\omega_n y)+\overline{z}_n(\tau)\exp(-i\omega_n y)\right].\quad (12)$$

Условия разрешимости краевых задач (11) приводят в свою очередь к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$i\omega_n\dot{z}_n=-\frac{1}{8}z_n+i\omega_n f_n,\quad n=1,2,\ldots,\quad (13)$$

для отыскания неизвестных амплитуд z_n, $n=1,2,\ldots$. Наконец, использование функции (12) «сворачивает» счетную систему уравнений (13) в краевую задачу

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\tau\partial y}=-\frac{1}{8}w+\left(\gamma-3w^2\right)\frac{\partial w}{\partial y},\quad w(\tau,y+2)\equiv-w(\tau,y).\quad (14)$$

Строгий смысл изложенным выше формальным построениям придается по той же схеме, что и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [4]). Именно: с помощью построенных отрезков рядов (8) конструируется замена переменных, приводящая исходную краевую задачу (7) с точностью до слагаемых порядка ε к виду (13). Таким образом, система (13), а значит, и краевая задача (14) представляют собой «укороченную» нормальную форму задачи (7). Поэтому справедливо следующее стандартное утверждение о соответствии между их периодическими решениями.

Т е о р е м а 1. *Пусть краевая задача* (14) *имеет периодическое решение* $w = w_0(\xi)$, $\xi = \sigma_0\tau + y$, *экспоненциально орбитально устойчивое или дихотомичное (в метрике* W_2^1*). Тогда найдется такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при всех* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *в исходной краевой задаче* (7) *ему отвечает цикл (периодическое по* t *решение) той же устойчивости с асимптотикой* (8). *При этом в формулах* (9) *следует положить* $z_n(\tau) = w_n^0 \exp(i\omega_n\sigma_0\tau)$, *где* w_n^0, $\overline{w}_n^0$, $n = 1, 2, \ldots$, — *коэффициенты Фурье функции* $w_0(\xi)$ *по системе* $\exp(\pm i\omega_n\xi)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Следует подчеркнуть, что примененный метод представляет собой бесконечномерный аналог широко используемого в теории колебаний метода медленно меняющихся амплитуд (см., напр., [7, 8]). Специфика этого метода в нашем случае состоит также и в том, что он применяется к краевой задаче (7), нелинейность в которой не является малой.

3. Выполняя в краевой задаче (14) подходящие нормировки переменных w, τ, y и заменяя τ на t, y на x, приведем ее к более удобному для анализа виду:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} = w + \lambda(1 - w^2)\frac{\partial w}{\partial x}, \quad w(t, x+1) = -w(t, x), \tag{15}$$

где $\lambda = 4\gamma > 0$. Из теоремы 1 следует, что особый интерес представляют ее периодические решения типа бегущих волн:

$$w = \theta(y), \quad y = \sigma t - x, \quad \sigma > 0. \tag{16}$$

Их динамика по λ подробно изучена в работе [9]; поэтому мы приведем здесь лишь краткий обзор содержащихся в [9] результатов.

Подставляя представление (16) в краевую задачу (15), для нахождения функции $\theta(y)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение, которое после замены $y/\sqrt{\sigma} \to y$ принимает вид

$$\theta'' + r(\theta^2 - 1)\theta' + \theta = 0, \tag{17}$$

где $r = \lambda/\sqrt{\sigma}$. Заметим, что (17) — это классическое уравнение Ван дер Поля, имеющее при всех $r > 0$ единственное периодическое решение $\theta = H(y, r)$, $H(y, 0) = 2\cos y$ с периодом $T = T(r)$, $T(0) = 2\pi$, удовлетворяющее также равенству $H(y + T/2, r) \equiv -H(y, r)$. Однако в силу того, что фигурирующая в (16) функция $\theta(y)$ 2-периодична, нас интересует решение уравнения (17) с периодом $2/\sqrt{\sigma}$. Поэтому для определения неизвестного параметра r получаем уравнение

$$\lambda T(r) - 2r = 0. \tag{18}$$

При $\lambda \ll 1$, применяя к уравнению (18) в точке $\lambda = 0$, $r = 0$ теорему о неявной функции, однозначно определяем его решение $r = r_0(\lambda)$, $r_0(0) = 0$. Вспоминая далее о связи уравнения (17) с исходной задачей (15), заключаем, что последняя имеет периодическое решение

$$w = \theta_0(y, \lambda), \quad y = \sigma_0(\lambda)t - x, \tag{19}$$

где $\sigma_0(\lambda) = (\lambda/r_0(\lambda))^2$, $\theta_0(y, \lambda) = H(y/\sqrt{\sigma_0(\lambda)}, r_0(\lambda))$. Отметим также, что наряду с решением (19) у краевой задачи (15) при $\lambda \ll 1$ существуют и другие периодические решения, получающиеся из построенного с помощью принципа подобия:

$$w = \theta_n(y, \lambda), \quad y = \sigma_n(\lambda)t - x, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{20}$$

где $\theta_n = \theta_0((2n+1)y, (2n+1)\lambda)$, $\sigma_n(\lambda) = \sigma_0((2n+1)\lambda)/(2n+1)^2$.

Т е о р е м а 2. *Для любого натурального* N *можно указать такое достаточно малое* $\lambda_N > 0$, *что при всех* $0 < \lambda \leqslant \lambda_N$ *краевая задача* (15) *имеет экспоненциально орбитально устойчивые периодические решения* (20) *с номерами* $n = 0, 1, 2, \ldots, N$.

Обратим внимание, что найденные решения краевой задачи (15) в форме волн стационарного профиля, описываемых уравнением Ван дер Поля, с физической точки зрения близки к автосолитонам, наблюдаемым, например, в кольцевом лазере в случае самосинхронизации мод (см. [8]). При такой интерпретации уравнение (18) представляет собой аналог нелинейного дисперсионного соотношения. Отметим еще, что в нашем случае «основной» период колебаний, т.е. период функции $\theta_0(y, \lambda)$, равен 2, а все функции $\theta_n(y, \lambda)$, $n \geqslant 1$, в силу принципа подобия имеют периоды $2/(2n+1)$. Отсюда с учетом теоремы 1 заключаем, что отвечающие решениям (20) периодические по t решения $(u_n(t, x, \varepsilon), v_n(t, x, \varepsilon))$, $n = 0, 1, \ldots$, исходной краевой задачи (7) имеют периоды $T_n(\varepsilon) = 4/(2n+1) + O(\varepsilon^2)$.

В дополнение к теореме 2 отметим, что каждое периодическое решение (20) непрерывно продолжается по параметру λ на интервал $0 < \lambda < \lambda_n$, $\lambda_n = \lambda_0/(2n+1)$, $\lambda_0 = 2/(3 - 2\ln 2)$, а при $\lambda \geqslant \lambda_n$ становится разрывным. С физической точки зрения это вполне понятно: увеличение энергетического параметра λ в совокупности с эффектом синхронизации мод приводит сначала к усложнению формы каждого цикла (20), а затем (при $\lambda \geqslant \lambda_n$) к полному его разрушению.

Из теорем 1 и 2 следует, что исходная краевая задача (7) при подходящем уменьшении параметров ε, γ может иметь любое фиксированное число устойчивых циклов. Данное свойство, называемое в ряде работ буферностью, представляет собой характерную особенность динамики широкого класса автогенераторов с $RLCG$-распределенными параметрами.

На принципиальную возможность существования сразу нескольких устойчивых циклов в классическом автогенераторе, содержащем отрезок длинной линии, указывал еще А. А. Витт (см. [10, 11]). Однако в полном объеме феномен буферности как таковой открыт не был. Видимо, впервые увеличение числа возможных автоколебательных режимов при изменении параметров автогенератора было замечено физиками экспериментально (см. [12]). Математическое же исследование буферности началось по инициативе

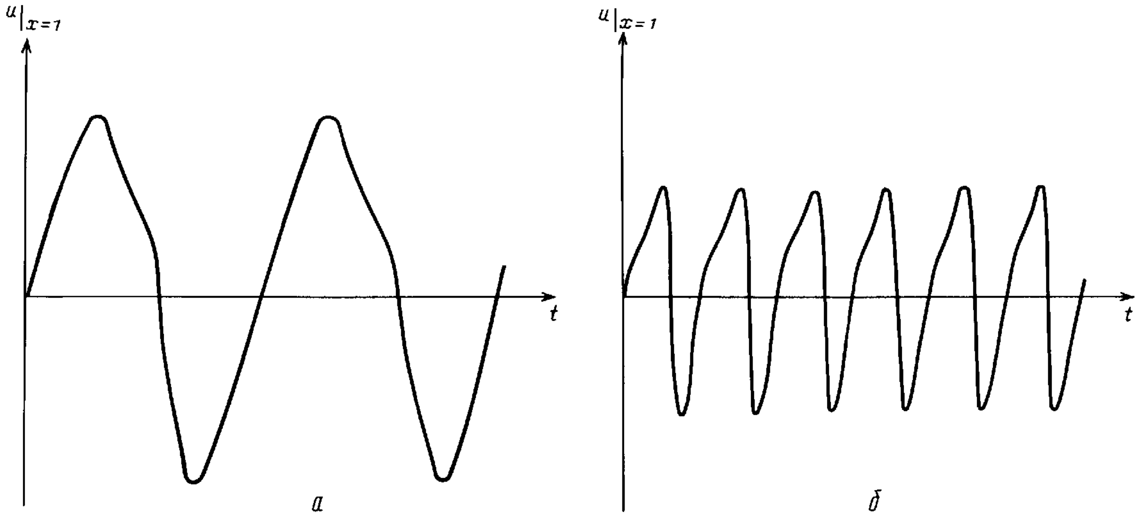


Рис. 2

Ю. С. Колесова, который численными методами изучал это явление в параболических системах типа реакция–диффузия [13], а затем исследовал его чисто теоретически в гиперболических уравнениях [14].

Укажем, что явление буферности подробно изучалось — как теоретически, так и экспериментально — в целом ряде различных задач (см., напр., [2, 9, 15, 16]). Подчеркнем, что аналогичные генераторы на сосредоточенных элементах, как правило, этим свойством не обладают.

4. Для проверки полученных теоретических результатов был собран АРП, (см. блок-схему на рис. 1, *а*). Основная линия была выполнена в виде прямого соленоида длиной $l_1 = 0{,}429$ м с диаметром $d = 0{,}048$ м. При этом общая длина l_2 намотанного проводника (с диаметром $\Delta = 0{,}00016$ м) составляла 404,32 м. Вспомогательная линия также представляла собой соленоид с геометрическими характеристиками $l_1 = 0{,}417$ м, $d = 0{,}054$ м, $l_2 = 176{,}86$ м, $\Delta = 4 \cdot 10^{-4}$ м, осью которого является основная линия. Суммарные значения распределенной индуктивности, емкости и сопротивления каждой линии составили $L_1 = 55{,}2$ мГн, $L_2 = 1{,}2$ мГн, $C_1 = 87{,}7$ пФ, $C_2 = 0$, $R_1 = 540$ Ом, $R_2 = 17$ Ом.

Широкополосный усилитель с входным и выходным активными сопротивлениями 50 МОм и 75 Ом имел равномерный коэффициент усиления в диапазоне частот от 100 кГц до 120 МГц, т. е. по своим характеристикам был близок к идеальному (его принципиальная схема приведена в работе [15]). Автоколебания, реализующиеся в генераторе, снимались с выхода усилителя и наблюдались на экране осциллографа.

При изменении коэффициента усиления в некотором диапазоне было обнаружено два сосуществующих периодических режима, реализация каждого из которых зависела (при фиксированных прочих параметрах) только от задания подходящих начальных условий для тока и напряжения. Для первого из них (см. рис. 2, *а*) амплитуда $A_1 = 0{,}75$ В, период $T_1 = 9$ мкс, а для второго (см. рис. 2, *б*) $A_2 = 0{,}45$ В, $T_2 = 3$ мкс. Отношение их периодов равно 1 : 3, что позволяло отождествить их с циклами краевой задачи (7), отвечающими бегущим волнам (20) с номерами $n = 0$ и $n = 1$.

Авторы выражают искреннюю благодарность В. Ф. Марченко, замечания и советы которого существенно содействовали улучшению содержания статьи и ясности изложения материала.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-00207).

Литература

1. *Камбулов В.Ф.* // ДАН СССР. 1994. **334**, № 5. С. 569.
2. *Камбулов В.Ф.* // Радиотехн. и электроника. 1997. **42**, № 9. С. 1121.
3. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М., 1959.
4. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1974.
5. *Колесов Ю.С.* // Матем. сб. 1993. **184**, № 3. С. 121.
6. *Колесов Ю.С.* // Там же. 1995. **186**, № 10. С. 57.
7. *Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н.* Основы теории колебаний. М., 1988.
8. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М., 1997.
9. *Камбулов В.Ф., Колесов А.Ю.* // Матем. моделирование. 1996. **8**, № 1. С. 93.
10. *Витт А.А.* // Журн. техн. физ. 1934. **4**, № 1. С. 144.
11. *Витт А.А.* // Там же. 1936. **6**, № 9. С. 1459.
12. *Азьян Ю.М., Мигулин В.В.* // Радиотехн. и электроника. 1956. **1**, № 4. С. 126.
13. *Захаров А.А., Колесов Ю.С.* // Нелинейные колебания и экология. Ярославль, 1984. С. 3.
14. *Колесов А.Ю., Колесов Ю.С.* // ДАН СССР. 1990. **315**, № 2. С. 281.
15. *Камбулов В.Ф., Колесов А.Ю.* // Радиотехн. и электроника. 1997. **43**, № 8. С. 1019.
16. *Камбулов В.Ф., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* // Дифф. уравнения. 1997. **33**, № 5. С. 638.

Поступила в редакцию
13.04.98