УДК 519.713; 519.711:53

О ЗАДАЧЕ ОПЕРАТИВНОГО КОНТРОЛЯ ТЕПЛОВОГО РЕЖИМА ЭЛЕКТРОННЫХ МИКРОСХЕМ

Б. И. Волков, Е. Б. Постников, Ю. П. Пытьев

(*кафедра компьютерных методов физики*)

Методом математического моделирования на основе теории измерительно-вычислительных систем решена задача эффективного размещения датчиков для контроля температуры в мощных микросхемах.

Введение

При эксплуатации электронных микросхем, в состав которых входят силовые элементы, выделяющие большое количество тепла, может происходить перегрев микросхемы в отдельных точках, приводящий к выходу из строя тех или иных элементов. Для оперативного контроля возможности перегрева необходимо в каждый момент времени $t \in [0, T]$ знать температуру любой точки схемы. На практике в некоторых точках схемы могут помещаться датчики, непрерывно измеряющие температуру. Поэтому возникает задача восстановления температуры в каждой точке микросхемы в любой момент времени $t \in [0, T]$ по результатам измерений температуры в отдельных точках до момента t включительно. Цель данного исследования — выбор точек размещения датчиков, обеспечивающий наибольшую точность восстановления распределения температуры.

1. Постановка задачи

Рассмотрим модельную задачу, в которой подложка с расположенными на ней элементами имеет вид тонкой прямоугольной пластины D с размерами $X \times Y \times Z$ (толщина Z намного меньше X, так что по оси Z температура одна и та же). Распределение температуры $v(x,t)$ на пластине описывается решением краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности. Для простоты рассмотрим одномерную модель: D — отрезок $[0, L]$. Пусть начальная температура пластины и температура окружающей среды равны нулю. Краевая задача в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} = a^2(x)\dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - q(x)v(x,t) + f(x,t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in (0, L), \\ \left.\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0, \quad v(x,0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $a^2(x)$ — коэффициент температуропроводности, $q(x) = h(x)/[c(x)\rho(x)]$, $f(x,t) = F(x,t)/[c(x)\rho(x)]$, $h(x)$ — коэффициент теплообмена с окружающей средой, $c(x)$ — удельная теплоемкость и $\rho(x)$ — плотность материала подложки, $F(x,t)$ — плотность тепловых источников.

Предположим, что область D представляет собой объединение двух областей: D_1 и D_2, где $D_2 = [l, L]$ — область, в которой находятся тепловыделяющие элементы, $D_1 = [0, l]$ — остальная область. Будем считать, что функция $f(x,t)$, описывающая влияние тепловых источников, отлична от нуля только внутри D_2, причем там она зависит только от t, а коэффициенты a_2 и q постоянны в пределах D_1 и D_2 и терпят разрыв на их границе.

При заданной функции f решение краевой задачи (1) можно записать с помощью функции Грина G:

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \int_0^t \left\{ \int_l^L G(x, x', t-\tau)\, dx' \right\} f(\tau)\, d\tau \equiv \\ &\equiv \int_0^t \widetilde{G}(x, t-\tau) f(\tau)\, d\tau, \end{aligned} \tag{2}$$

для определения которой в каждой из областей D_1 и D_2 ставится задача (1) с постоянными коэффициентами, а на границе $x = l$ выполняются условия сопряжения — непрерывность по x температуры $v(x,t)$ и теплового потока $k(x)\partial v(x,t)/\partial x$, где $k(x) = c(x)\rho(x)a^2(x)$ — коэффициент теплопроводности. (В формуле (2) выражение в фигурных скобках обозначено как $\widetilde{G}$.)

Выражение для G записывается в виде бесконечного ряда по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля с разрывными коэффициентами. Аналитическое решение этой задачи было найдено для представляющего практический интерес случая $q_2 > q_1$.

2. Редукция измерений

Математическая модель линейной схемы измерений имеет вид

$$\xi = Af + \nu, \tag{3}$$

где $\xi \in \mathcal{R}$ — искаженный шумом $\nu \in \mathcal{R}$ выходной сигнал прибора A, на вход которого поступил сигнал $f \in \widetilde{\mathcal{R}}$ ($\mathcal{R}$ и $\widetilde{\mathcal{R}}$ — евклидовы пространства). Пусть f — априори произвольный вектор пространства $\widetilde{\mathcal{R}}$, ν — случайный вектор пространства $\mathcal{R}$ с математическим ожиданием $\mathbf{E}\nu = 0$ и заданы линейные операторы: A и Σ — корреляционный оператор случайного вектора ν (задана модель $[A, \Sigma]$ схемы измерений (3) [1]). В задаче редукции измерения (3) задан

линейный оператор U, определяющий представляющие интерес параметры Uf сигнала f, и требуется определить линейный оператор R так, чтобы $R\xi$ можно было интерпретировать как наиболее точную в среднем квадратичном (с. к.) версию Uf для произвольного сигнала f. В нашем случае задача редукции разрешима, а с. к. погрешность равна [1]

$$h(R,U) = \min_R \operatorname*{sp}_{f\in\widetilde{\mathcal{R}}} E||R\xi - Uf||^2 = \operatorname{tr} U(A^*\Sigma^{-1}A)^- U^*.$$

В рассматриваемом случае ξ представляет температуру в точке x_d, искаженную шумом измерений ν; f — влияние тепловых источников, A — интегральный оператор с ядром $\widetilde{G}(x_d, t-\tau)$. Интересующая нас температура в некоторой точке x_0 может быть интерпретирована как сигнал на выходе прибора U, если U — интегральный оператор с ядром $\widetilde{G}(x_0, t-\tau)$.

Для проведения численных экспериментов были рассмотрены два временных режима: непрерывный с произвольной зависимостью $f(\tau)$ от времени и режим с переключением, когда $f(\tau) = f_1$, если $\tau \in (0, T_f)$, и $f(\tau) = f_2$, если $\tau \in (T_f, T)$. В дискретном варианте функция $f(\tau)$ приближалась кусочно-постоянной функцией, а функции $v(x,t)$ и $\nu(x,t)$ для фиксированного x задавались своими значениями в узлах равномерной сетки по t.

3. Вычислительный эксперимент

В вычислительном эксперименте по данным измерений температуры в точке x_d за период $[T_{d1}, T]$, где $T_{d1} > 0$, были вычислены h_T и $<h_{(0,T]}>$ — погрешность восстановления температуры в точке x_0 в момент времени T и средняя погрешность в точке x_0 за весь период от 0 до T. Получены зависимости этих величин от x_d при различных фиксированных значениях x_0. Во всех расчетах полагалось $\Sigma = I$, $a_1 = a_2 = 5$, $k_1 = k_2$ (все величины даны в безразмерных единицах). Напомним, что тепловые источники находятся лишь в области $D_2 = [l, L]$.

Результаты численных расчетов следующие:

1) если измерения проводить начиная с момента времени, близкого к $t = 0$, то при любых значениях q_1 и q_2 и для любой точки x_0 минимум погрешностей $h_T(x_d)$ и $h_{(0,T]}(x_d)$ достигается в области D_2;

2) если температура измеряется не с момента $t = 0$, то при достаточно большой разности $q_2 - q_1$ минимум $h_T(x_d)$ достигается вне области D_2, если x_0 находится вне области D_2 (подобная картина наблюдается и для режима с переключением — рис. 1 и для непрерывного режима — рис. 2), а минимум $h_{(0,T]}(x_d)$ для режима с переключением достигается вне области D_2 для любых x_0 (рис. 3). Для непрерывного режима $<h_{(0,T]}>$ намного больше единицы (даже при $q_1 = q_2 = 0$).

Таким образом, если имеется возможность проводить измерения начиная с $t = 0$, то при любых значениях q_1 и q_2 оптимальной областью расположения датчиков является область с источниками тепла.

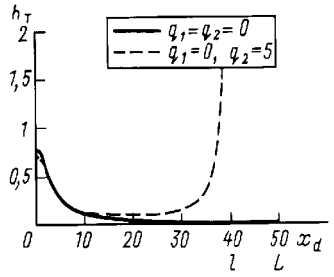

Рис. 1. Зависимости $h_T(x_d)$ (при $x_0 = 0$). Режим с переключением, $T_f = T/2 = 5$. Измерения проводились с момента времени $T_{d1} = 7$ до $T = 10$ с шагом $\Delta t = 0{,}5$

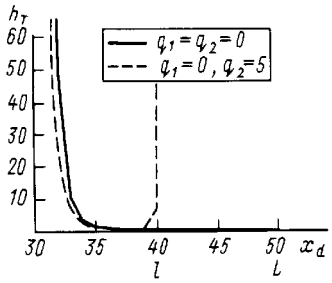

Рис. 2. Зависимости $h_T(x_d)$ (при $x_0 = 35$) для задачи с непрерывным режимом (количество шагов по τ равно 17). Измерения проводились с момента времени $T_{d1} = 1{,}1$ до $T = 10$ с шагом $\Delta t = 0{,}445$

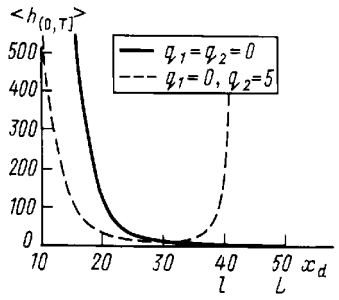

Рис. 3. Зависимости $<h_{(0,T]}>(x_d)$ (при $x_0 = 50$; восстановление проводилось с момента времени $\widetilde{t} = 0{,}5$ до $\widetilde{t} = T$ с шагом $\Delta\widetilde{t} = 0{,}95$). Режим с переключением, $T_f = T/2 = 5$. Измерения проводились с момента времени $T_{d1} = 7$ до $T = 10$ с шагом $\Delta t = 0{,}5$

Если же измерения могут проводиться только начиная с некоторого момента $T_{d1} > 0$, то при достаточно большом значении $q_2 - q_1$ оптимальной является определенная область микросхемы вне источников (за исключением случая, когда нас интересует температура области с источниками только в момент проведения последнего измерения).

Литература

1. *Пытьев Ю.П.* Методы анализа и интерпретации эксперимента. М., 1990.

Поступила в редакцию
17.02.99