

УДК 517.958

О ВОЗБУЖДЕНИИ ВОЛНОВОДА СО СЛОЖНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

А. Н. Боголюбов, А. Л. Делицын, А. Г. Свешников

(кафедра математики)

Рассматривается вопрос о возбуждении волновода со сложным диэлектрическим и магнитным заполнением. Предложена новая схема метода нормальных волн.

Введение

В настоящей работе рассматривается задача возбуждения волновода со сложным заполнением. При этом получающаяся вспомогательная спектральная задача может быть эффективно решена численными методами. Кроме того, упрощается математическое исследование задачи. Отметим, что для решения спектральной задачи подобный подход был использован в работах Т. Кобайяси и М. Отаки [1, 2], на что любезно указал профессор М. Кошиба в личной переписке с одним из авторов. К сожалению, эти работы, опубликованные только на японском языке, не были известны авторам на момент выхода работы [3], в которой был предложен вывод аналогичной системы уравнений для спектральной задачи, основанный на ином подходе.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу возбуждения регулярного волновода. Волновод представляет собой цилиндр: $Q = ((x, y) \in D, z \in (-\infty, \infty))$, где D — область с липшиц-непрерывной границей. Волновод заполнен средой, диэлектрическая и магнитная проницаемости которой, $\varepsilon(x, y), \mu(x, y)$, — вещественные, кусочно-непрерывные функции, стенки волновода идеально проводящие. Считаем, что ток, возбуждающий поле в волноводе, и электромагнитное поле имеют временную зависимость $e^{-i\omega t}$, причем частота электромагнитного поля не совпадает с частотой отсечки. Для решения подобной задачи разрабатывался метод нормальных волн, например, в работе П. Е. Краснушкина и Е. И. Моисеева [4]. Однако при использовании метода, развитого в этой работе, требуется, чтобы продольная компонента тока была всюду дифференцируемой функцией, хотя на практике ток может быть разрывной функцией. В настоящей работе предлагается иная схема применения метода нормальных волн, причем рассмотрение ограничивается изложением формальной схемы метода. Вопрос о полноте системы нормальных волн рассмотрен в работе авторов [5] и служит частичным обоснованием метода. Для постановки задачи, в отличие от общеупотребительного подхода, будем использовать уравнения

$$\begin{pmatrix} 0 & ik & \frac{\partial}{\partial x} \\ -ik & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & & \\ & \varepsilon^{-1} & \\ & & \mu \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ H_z \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -ik & \frac{\partial}{\partial x} \\ ik & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ H_z \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \mu^{-1} & & \\ & \mu^{-1} & \\ & & \varepsilon \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ E_z \end{pmatrix} + \frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} -j_y \\ j_x \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Граничные условия имеют вид

$$(Bn)|_{\partial D} = 0, \quad E_z|_{\partial D} = 0. \quad (3)$$

На линиях разрыва C диэлектрической и магнитной проницаемости поставим условия сопряжения:

$$[(Bn)]|_C = 0, \quad [E_z]|_C = 0, \quad (4)$$

$$[(Dn)]|_C = 0, \quad [H_z]|_C = 0. \quad (5)$$

Для сокращения записи введем следующие обозначения:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & ik & \frac{\partial}{\partial x} \\ -ik & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & -ik & \frac{\partial}{\partial x} \\ ik & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix},$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & & \\ & \varepsilon^{-1} & \\ & & \mu \end{pmatrix}, \quad d_2 = \begin{pmatrix} \mu^{-1} & & \\ & \mu^{-1} & \\ & & \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$J = \frac{4\pi}{c} (-j_y, j_x, 0)^T,$$

$$A_1 = (B_x, B_y, E_z)^T, \quad A_2 = (D_x, D_y, H_z)^T.$$

Уравнения (1)–(2) примут вид

$$a_1 A_1 = d_1 \frac{\partial}{\partial z} A_2, \quad a_2 A_2 = d_2 \frac{\partial}{\partial z} A_1 + J. \quad (6)$$

Ток J локализован в конечной области. Поскольку ток удовлетворяет уравнению непрерывности, j_z -компонента не является независимой. Этим объясняется тот факт, что j_z -компонента не присутствует в уравнениях. Отметим, что для простоты изложения мы считаем, что волновод возбуждается током, удовлетворяющим условию $\operatorname{div} j = 0$, которое не является принципиальным.

Уравнения (1)–(2) и условия (3)–(5) необходимо дополнить условиями излучения, которые мы введем ниже.

2. Метод нормальных волн

Для решения задачи (1)–(5) применим метод нормальных волн. Нормальные волны являются решениями однородных уравнений (6) вида

$$A_1 = \sum_{k=0}^n \frac{z^{n-k}}{(n-k)!} A_{1k} e^{i\gamma_n z}, \quad A_2 = \sum_{k=0}^n \frac{z^{n-k}}{(n-k)!} A_{2k} e^{i\gamma_n z}.$$

В целях упрощения изложения будем считать, что присоединенные векторы отсутствуют и можно ограничиться следующими решениями:

$$A_1 = A_{1n} e^{i\gamma_n z}, \quad A_2 = A_{2n} e^{i\gamma_n z}. \quad (7)$$

Однородные уравнения (6) после подстановки решений (7) принимают вид

$$a_1 A_{1n} = i\gamma_n d_1 A_{2n}, \quad a_2 A_{2n} = i\gamma_n d_2 A_{1n}. \quad (8)$$

Системы (8) эквивалентны уравнениям

$$a_2 d_1^{-1} a_1 A_{1n} = -\gamma_n^2 d_2 A_{1n}, \quad (9)$$

$$a_1 d_2^{-1} a_2 A_{2n} = -\gamma_n^2 d_1 A_{2n}. \quad (10)$$

Уравнение (9) необходимо дополнить граничными условиями (3), условиями сопряжения (4) и следующими из (5) условиями

$$\left[\varepsilon \left(\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - ikB_x \right) n_y + \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} + ikB_y \right) n_x \right) \right] \Big|_C = 0, \quad (11)$$

$$\left[\mu^{-1} \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) \right] \Big|_C = 0.$$

В покоординатной записи уравнение (9) представимо в виде

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} \mu^{-1} \frac{\partial}{\partial x} - k^2 \varepsilon & -\frac{\partial}{\partial x} \mu^{-1} \frac{\partial}{\partial y} & -ik\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \mu^{-1} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} \mu^{-1} \frac{\partial}{\partial y} - k^2 \varepsilon & ik\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \\ ik \frac{\partial}{\partial y} \varepsilon & -ik \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon & -\frac{\partial}{\partial x} \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} B_{xn} \\ B_{yn} \\ E_{zn} \end{pmatrix} = -\gamma_n^2 \begin{pmatrix} \mu^{-1} & \\ & \mu^{-1} \\ & & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{xn} \\ B_{yn} \\ E_{zn} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

В результате приходим к спектральной задаче (12), (3), (11), роль спектрального параметра в которой играет γ_n^2 . Для простоты в данной работе будем считать, что все собственные значения однократны.

Условия (11) являются естественными. Последнее обстоятельство представляется важным при применении к данной задаче какого-либо варианта метода Галеркина, например метода конечных элементов.

Аналогичным образом уравнение (10) приводится к виду

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial x} - k^2 \mu & -\frac{\partial}{\partial x} \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y} & ik\mu \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y} - k^2 \mu & -ik\mu \frac{\partial}{\partial x} \\ -ik \frac{\partial}{\partial y} \mu & ik \frac{\partial}{\partial x} \mu & -\frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} D_{xn} \\ D_{yn} \\ H_{zn} \end{pmatrix} = -\gamma_n^2 \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & & \\ & \varepsilon^{-1} & \\ & & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{xn} \\ D_{yn} \\ H_{zn} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Отметим, что и граничные условия

$$\left(\mu \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} + ikD_x \right) n_y + \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - ikD_y \right) n_x \right) \Big|_{\partial D} = 0, \quad (14)$$

$$\varepsilon^{-1} \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} \right) \Big|_{\partial D} = 0$$

в рассматриваемой постановке являются естественными, что делает последнюю систему (13) особенно удобной для численного решения. Условия сопряжения имеют вид (5), а также

$$\left[\left(\mu \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} + ikD_x \right) n_y + \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - ikD_y \right) n_x \right) \right] \Big|_C = 0, \quad (15)$$

$$\left[\varepsilon^{-1} \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} \right) \right] \Big|_C = 0.$$

Будем обозначать ниже через A_{1n} , A_{2n} собственные векторы, отвечающие ненулевым собственным значениям. Векторы A_{1n} , A_{2n} удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial \mu^{-1} B_y}{\partial x} - \frac{\partial \mu^{-1} B_x}{\partial y} + ik\varepsilon E_z = 0,$$

$$\frac{\partial \varepsilon^{-1} D_y}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon^{-1} D_x}{\partial y} - ik\mu H_z = 0.$$

Данные уравнения представляют собой уравнения Максвелла, которые не использовались при постановке задачи.

Легко видеть, что операторы $a_2 d_1^{-1} a_1$, $a_1 d_2^{-1} a_2$ являются \mathcal{J} -симметричными дифференциальными выражениями, где $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \\ & & -1 \end{pmatrix}$. Следовательно,

справедливы следующие утверждения. Собственные значения γ_n^2 расположены симметрично относительно вещественной оси. Собственные векторы A_{1n} , A_{2n} , отвечающие ненулевым собственным значениям, удовлетворяют условиям

$$(A_{1n}, \mathcal{J} d_2 A_{1m})_{L_2(D)} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma_n^* \neq \gamma_m,$$

$$(A_{2n}, \mathcal{J} d_1 A_{2m})_{L_2(D)} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma_n^* \neq \gamma_m.$$

Особенностью как задачи (12), так и задачи (13) является наличие бесконечномерного ядра, в первом случае вида

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}, -\frac{\partial \phi}{\partial x}, ik\phi \right)^T, \quad (16)$$

во втором —

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x}, -ik\psi \right)^T, \quad (17)$$

где ϕ , ψ — произвольные достаточно гладкие функции.

Будем проводить дальнейшее исследование при следующих предположениях. Пространство $(L_2)^3$ распадается в прямую сумму подпространств векторов, удовлетворяющих условию

$$\frac{\partial \mu^{-1} B_y}{\partial x} - \frac{\partial \mu^{-1} B_x}{\partial y} + ik\varepsilon E_z = 0, \quad (18)$$

где производные понимаются как обобщенные, и векторов, которые могут быть приближены с любой точностью векторами вида (16). Пространство $(L_2)^3$ представимо в виде прямой суммы подпространств векторов, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{\partial \varepsilon^{-1} D_y}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon^{-1} D_x}{\partial y} - ik\mu H_z = 0, \quad (19)$$

и векторов, приближаемых векторами вида (17). Собственные векторы задачи для уравнения (12) полны в подпространстве пространства $(L_2)^3$, выделяемого условием (18). Собственные векторы задачи для уравнения (10) полны в подпространстве пространства $(L_2)^3$, выделяемого условием (19). Заметим, что для собственных векторов, удовлетворяющих уравнениям (12), при ненулевом γ справедливы условия (18)–(19). Вне области, занятой токами, вектор A_1 удовлетворяет уравнению (18). Для вектора A_2 уравнение (19) выполняется во всей области. Таким образом, вектор A_1 может быть приближен с любой точностью суммой

$$A_1 = \sum_n Z_{1n}(z) A_{1n} + \sum_n \bar{Z}_n(z) B_{1n}, \quad (20)$$

где B_{1n} — базис пространства векторов вида

$$B_{1n} = \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial y}, -\frac{\partial \phi_n}{\partial x}, ik\phi_n \right).$$

Выберем векторы B_{1n} удовлетворяющими условию

$$(\mathcal{J}d_2 B_{1n}, B_{1m})_{L_2} = 0, \quad n \neq m.$$

Вектор A_2 может быть приближен векторами вида

$$A_2 = \sum_n Z_{2n} A_{2n}. \quad (21)$$

Аппроксимируем вектор $d_2^{-1} J$ суммой:

$$d_2^{-1} J = \sum_n J_{1n}(z) A_{1n} + \sum_n \bar{J}_n(z) B_{1n}. \quad (22)$$

Вне области, занятой токами (пусть это область $z \leq z_1, z \geq z_2$), поле может быть представлено в виде

$$A_1 = \begin{cases} \sum_n c_{1n} A_{1n} e^{-i\gamma_n z}, & z < z_1, \\ \sum_n \bar{c}_{1n} A_{1n} e^{i\gamma_n z}, & z \geq z_2, \end{cases} \quad (23)$$

$$A_2 = \begin{cases} \sum_n c_{2n} A_{2n} e^{-i\gamma_n z}, & z \leq z_1, \\ \sum_n \bar{c}_{2n} A_{2n} e^{i\gamma_n z}, & z \geq z_2. \end{cases} \quad (24)$$

Эти условия являются в данном случае условиями излучения [6].

Функции Z_{1n} , Z_{2n} удовлетворяют следующим граничным условиям при $z = z_1$, $z = z_2$:

$$\frac{\partial Z_{1n}(z_1)}{\partial z} + i\gamma_n Z_{1n}(z_1) = 0, \quad \frac{\partial Z_{1n}(z_2)}{\partial z} - i\gamma_n Z_{1n}(z_2) = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial Z_{2n}(z_1)}{\partial z} + i\gamma_n Z_{2n}(z_1) = 0, \quad \frac{\partial Z_{2n}(z_2)}{\partial z} - i\gamma_n Z_{2n}(z_2) = 0. \quad (26)$$

Поскольку вне области $z_1 < z < z_2$ вектор A_1 удовлетворяет условию (18) и имеет вид (20), то

$$\bar{Z}_n(z_1) = 0, \quad \bar{Z}_n(z_2) = 0. \quad (27)$$

Перепишем уравнения (6) в виде

$$d_1^{-1} a_1 A_1 = \frac{\partial}{\partial z} A_2, \quad d_2^{-1} a_2 A_2 = \frac{\partial}{\partial z} A_1 + d_2^{-1} J. \quad (28)$$

После подстановки в систему (28) A_1 , A_2 , J в виде (20), (21), (22) получим

$$\sum_n i\gamma_n Z_{1n} A_{2n} = \sum_n Z'_{2n} A_{2n}, \quad (29)$$

$$\sum_n i\gamma_n Z_{2n} A_{1n} = \sum_n Z'_{1n} A_{1n} + \sum_n \bar{Z}'_n B_{1n} + \sum_n J_n(z) A_{1n} + \sum_n \bar{J}_n(z) B_{1n}. \quad (30)$$

Функция Z_{1n} определяется из уравнения (29):

$$i\gamma_n Z_{1n} = Z'_{2n}.$$

В результате для Z_{2n} получим уравнение

$$Z''_{2n} + \gamma_n^2 Z_{2n} = -i\gamma_n J_n(z) \quad (31)$$

с граничными условиями (26). Для \bar{Z}_n имеем уравнение

$$\bar{Z}'_n = \bar{J}_n(z) \quad (32)$$

с граничными условиями (27). При этом задача не является переопределенной. Действительно, поскольку

$$\bar{J}_n(z) = \frac{(J, \mathcal{J}B_{1n})_{L_2}}{(\mathcal{J}d_2 B_{1n}, B_{1n})_{L_2}},$$

то, если \bar{Z}_n удовлетворяет краевому условию при $z = z_1$, оно удовлетворяет этому условию и при $z = z_2$. В самом деле,

$$(\mathcal{J}d_2 B_{1n}, B_{1n})_{L_2} \bar{Z}_n = \int_{z_1}^{z_2} \int_D \left(-j_y \frac{\partial \phi_n}{\partial y} - j_x \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \right) dS dz =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{z_1}^{z_2} \int_D \frac{\partial j_z}{\partial z} \phi_n dS = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_D j_z \phi_n dS \right) dz = \\
 &= \int_D j_z(z) \phi_n dS \Big|_{z_1}^{z_2}.
 \end{aligned}$$

Поскольку $j_z(z) = 0$ при $z \geq z_2$, то $\bar{Z}_n(z_2) = 0$.

В случае если система векторов A_{1n} не только полна, но и является базисом соответствующего пространства, J_{1n} определяется из соотношения

$$J_{1n}(z) = \frac{(J, \mathcal{J} A_{1m})_{L_2}}{(d_2 A_{1n}, \mathcal{J} A_{1m})_{L_2}}. \quad (33)$$

Таким образом, Z_n определяется из уравнения (31) и граничных условий (26). Решение задачи осуществляется при произвольном токе из $(L_2)^3$, удовлетворяющем уравнению непрерывности.

Заключение

Отметим, что для Z_{1n} , \bar{Z}_n и Z_{2n} получаются чрезвычайно простые краевые задачи и основная проблема сводится к численному решению спектральных задач для векторов A_1 и A_2 , которым посвящены работы авторов [7, 8].

Проблемы, связанные с обоснованием предложенной методики, будут рассмотрены в последующих работах авторов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 97-01-01081).

Литература

1. Ohtaka M., Kobaiashi T. // Trans. Inst. Electron. Inform. Commun. Eng. 1994. **J77-C-I**. P. 679.
2. Ohtaka M., Kobaiashi T. // Trans. Inst. Electron. Inform. Commun. Eng. 1989. **J72-C-I**. P. 217.
3. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1995. № 2. С. 95 (Moscow University Phys. Bull. 1995. No. 2. P. 85).
4. Краснушкин П.Е., Мусеев Е.И. // ДАН. 1982. **264**, № 5. С. 1123.
5. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Свешиников А.Г. // ЖВМ и МФ. 1998. № 11. С. 9.
6. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешиников А.Г. Математические модели электродинамики. М., 1991.
7. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1996. № 1. С. 9 (Moscow University Phys. Bull. 1996. No. 1. P. 7).
8. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л. // Там же. 1997. № 1. С. 69 (Ibid. 1997. No. 1. P. 96).

Поступила в редакцию
24.06.98

УДК 530.145

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТОЧНОСТЬ РАЗЛИЧЕНИЯ СОСТОЯНИЙ С ЗАДАННОЙ ЭНЕРГИЕЙ

И. И. Каледин, Ф. Я. Халили

(кафедра молекулярной физики и физических измерений)

Рассмотрена проблема различения двух квантовых состояний с заданной энергией. Показано, что в данном случае динамическая жесткость, присущая невозмущающему измерителю энергии, не оказывает влияния на достоверность различения состояний.

Введение

С тех пор как стало возможным получение объектов с существенно квантовым поведением, интерес к проблеме квантовых измерений резко возрос. Разработка надежных каналов связи, исследования в области создания гравитационных антенн, появление работ, посвященных квантовым компьютерам, — все это стимулирует бурное развитие квантовой теории измерений. Все большее число задач требует ее применения. Мы остановимся на приложении одного из следствий этой теории к задаче считывания информации в квантовых компьютерах.

В обычных (классических) компьютерах в качестве ячеек памяти используют объекты с классическим поведением, состоящие из большого числа атомов ($> 10^{12}$). Информацию в эти ячейки можно записать, изменяя их макроскопическое состояние. Квантовые компьютеры являются естественным продолжением компьютерной техники в микромир: ячейка памяти

для них — какой-либо квантовый объект, а информация — квантовое состояние этого объекта.

Одна из возможных реализаций квантовой ячейки памяти — резонатор, в котором локализовано электромагнитное поле некоторой энергии E . По значению этой энергии мы будем судить о записанной информации. В частности, если энергия поля равна E_1 , то в ячейке записан ноль, а если энергия равна E_2 , то единица. Мы будем говорить только о процессе считывания информации, оставляя за пределами рассмотрения вопрос о ее записи, т. е. будем считать, что у нас имеется резонатор с электромагнитным полем и априорным распределением, задаваемым формулой

$$w(E) = p_1 \delta(E - E_1) + p_2 \delta(E - E_2), \quad (1)$$

где p_1 и p_2 — вероятности того, что энергия системы равна соответственно E_1 и E_2 .

Необходимое условие работы квантового компьютера — это отсутствие поглощения энергии [1]. Поэтому измерение должно быть невозмущаю-