

## ПЛАНЕТАРНАЯ МОДЕЛЬ АТОМА ВОДОРОДА НА ФОНЕ ФЛУКТУАЦИЙ ВАКУУМА: ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

А. В. Белинский

(кафедра компьютерных методов физики)

Гипотеза реального существования флуктуаций вакуума позволяет разрешить ряд важных задач в рамках классической электромагнитной теории, и в частности проблему стабильности атома водорода. Однако известные решения этой задачи противоречивы: *Boyer* и *Ruthoff* исходят из круговой орбиты электрона, а *Nelson* показывает, что электрон колеблется в радиальном направлении и имеет нулевой орбитальный момент. Для проверки этих результатов проведен численный эксперимент, который подтвердил, что электрон действительно не падает на ядро, но вопрос о стабильности круговой орбиты в планетарной модели остается открытым.

### Введение

Классическая планетарная модель атома Резерфорда, как известно, неудовлетворительна, поскольку электрон из-за испускания электромагнитного излучения должен упасть на ядро. Квантовая теория свободна от этого недостатка. Следствием ее является наличие флуктуаций вакуума, природа которых неизвестна.

Концепция вакуумных флуктуаций как фона электромагнитных волн, согласно результатам работ [1–4], устраняет недостатки классической планетарной модели атома Резерфорда: за счет подкачки энергии от этих волн электрону стабильность атома сохраняется. При этом описание проводится в рамках классической электродинамики. Единственный результат, привносимый из квантовой теории, состоит в том, что энергия каждой моды вакуумного состояния берется равной  $\hbar\omega/2$ . Однако рассмотрение в работе [1] проведено на основе предположения о том, что орбита электрона круговая, а в работе [2] решена линейная задача фактически в одномерном приближении гармонического осциллятора. Строго говоря, следует решать нелинейную (из-за кулоновской силы) трехмерную задачу [3]. Это и поставлено целью настоящей работы. Отметим также, что в монографии [4, с. 99] подтверждена стабильность атома водорода в основном состоянии, однако траектория электрона оказалась не круговой, а осциллирующей в радиальном направлении и никогда не достигающей ядра.

### Модель вакуумных флуктуаций

Примем модель вакуумных флуктуаций в соответствии с работой [2]. Выберем достаточно большой объем  $L^3$  (превышающий размеры атома) в виде куба и будем считать, что пространство в этом кубе заполнено только электромагнитным фоном вакуума. Положим энергию каждой плоской гармонической моды этого фона равной  $\hbar\omega_k/2$ , где  $\omega_k = kc$  — круговая частота моды с волновым вектором  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ . Длина волнового вектора  $k = |\mathbf{k}|$ , а  $c$  — скорость света в вакууме. Таким образом, амплитуда моды  $E_k = \sqrt{2\hbar\omega_k/L^3}$  (см. при-

ложение). Фазу моды  $\theta_{\mathbf{k},\sigma}$  положим случайной и равномерно распределенной на полуинтервале  $[0, 2\pi)$ . Индекс  $\sigma = 1$  или  $2$  соответствует одной из двух ортогональных поляризаций. Моды и их фазы считаем взаимно независимыми. Электромагнитное поле вакуума поперечное. Напряженность моды электрической составляющей поля в точке  $(\mathbf{r}, t)$  будет равной

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k},\sigma}(\mathbf{r}, t) = \sigma E_{k,\sigma}, \quad E_{k,\sigma} = E_k \cos[\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t + \theta_{\mathbf{k},\sigma}].$$

Здесь  $\sigma$  — единичный вектор в направлении электрической составляющей поля поляризации  $\sigma$ . Представим напряженность всего фона в виде суммы по  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{n_x=-\infty}^{\infty} \sum_{n_y=-\infty}^{\infty} \sum_{n_z=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{k},\sigma}(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

$$\mathbf{k} = \left\{ \frac{2\pi}{L}n_x, \frac{2\pi}{L}n_y, \frac{2\pi}{L}n_z \right\},$$

$$n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Поскольку с ростом  $k$  растет и  $E_k$ , сумма (1) расходится.

### Модель атома водорода в поле вакуумных флуктуаций

Поместим невозбужденный атом водорода в центр куба со стороной  $L$ , которую будем полагать длиной квантования [5, с. 232]. Согласно модели Резерфорда, электрон вращается по круговой (первой боровской) орбите вокруг протона. Радиус-вектор последнего положим  $\mathbf{r} = (0, 0, 0)$ . Как и в работе [2], полагаем протон неподвижным. Пренебрежем также и влиянием на атом магнитной компоненты внешнего поля.

С добавлением атома в объем квантования электромагнитное поле перестает быть поперечным, так как добавление сторонних токов (в данном случае это движение электрона) приводит к возникновению продольной компоненты электрического поля [5, с. 235]. Будем считать вакуум линейной средой, а электромагнитное поле — суммой не возмущенного электроном вакуумного фона (в отсутствие атома)

и излучения электрона. Излучение электрона учтем введением силы радиационного трения [6].

Время, в течение которого рассматривается эволюция атома, ограничим значением  $t < L/2c$  (время распространения света от границ до атома). Например, при  $L = 10^{-4}$  см время эволюции не должно превышать примерно 10 периодов обращения электрона по первой бордовской орбите.

**Основные соотношения**

Компоненты амплитуды вектора напряженности электрического поля моды  $\mathbf{E}_{\mathbf{k},\sigma} = (E_{\mathbf{k},\sigma x}, E_{\mathbf{k},\sigma y}, E_{\mathbf{k},\sigma z})$ , согласно приложению, равны

$$E_{\mathbf{k},1x} = \frac{k_y}{k_-} E_{\mathbf{k},1}, \quad E_{\mathbf{k},2x} = \frac{k_x k_z}{k_- k} E_{\mathbf{k},2}, \quad (2)$$

$$E_{\mathbf{k},1y} = -\frac{k_x}{k_-} E_{\mathbf{k},1}, \quad E_{\mathbf{k},2y} = \frac{k_y k_z}{k_- k} E_{\mathbf{k},2}, \quad (3)$$

$$E_{\mathbf{k},1z} = 0, \quad E_{\mathbf{k},2z} = -\frac{k_-}{k} E_{\mathbf{k},2}, \quad (4)$$

где  $k_- = |\mathbf{k}_-| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ .

Уравнение движения электрона вокруг протона имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e^2 \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{r}} - e\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (5)$$

где слагаемые в правой части описывают соответственно кулоновскую силу, силу радиационного трения [6, с. 269] и силу, воздействующую на электрон со стороны внешнего (вакуумного) поля.

Пронормируем  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  по радиусу первой бордовской орбиты электрона  $r_H$ :

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}}{r_H}, \quad r_H = \sqrt[3]{\frac{e^2}{m\omega_H^2}} \approx 5,2917 \cdot 10^{-9} \text{ см},$$

где  $\omega_H \approx 4,1343 \cdot 10^{16}$  рад/с — круговая частота вращения электрона по первой бордовской орбите в отсутствие радиационного трения и внешнего поля.

Пронормируем также время на величину  $\omega_H^{-1}$ , т.е. введем  $T = \omega_H t$ . При такой нормировке коэффициент при кулоновской силе оказывается равным единице и выражение (5) принимает вид

$$\ddot{\mathbf{R}} + \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} - \alpha \ddot{\mathbf{R}} + \mathbf{F}(\mathbf{R}, T) = 0, \quad (6)$$

где

$$\alpha = \frac{2e^2\omega_H}{3mc^3} \approx 2,5908 \cdot 10^{-7},$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}, T) = \frac{e}{m\omega_H^2 r_H} \mathbf{E}(\mathbf{R}, T).$$

Воспользуемся малостью коэффициента  $\alpha$  и представим решение уравнения (6) в виде

$$\mathbf{R}(T) = \mathbf{R}_0(T) - \alpha \mathbf{R}_1(T), \quad (7)$$

где  $\mathbf{R}_0(T)$  — радиус-вектор траектории электрона в отсутствие радиационного трения,  $\mathbf{R}_1(T)$  — поправка, обусловленная радиационным трением.

Подставим (7) в (6) и разложим кулоновское слагаемое в ряд по степеням  $\alpha$ :

$$\frac{\mathbf{R}_0 - \alpha \mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_0 - \alpha \mathbf{R}_1|^3} \approx \frac{\mathbf{R}_0}{|\mathbf{R}_0|^3} - \alpha \frac{\mathbf{R}_1 |\mathbf{R}_0|^2 - 3\mathbf{R}_0(\mathbf{R}_0 \mathbf{R}_1)}{|\mathbf{R}_0|^5}.$$

Здесь и далее ограничиваемся слагаемыми не выше первой степени по  $\alpha$ . Положим также, что характерный масштаб изменения  $\mathbf{F}$  по  $\mathbf{R}$  существенно больше, чем  $\alpha \mathbf{R}_1$ , тогда

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}_0 - \alpha \mathbf{R}_1, T) \approx \mathbf{F}(\mathbf{R}_0, T).$$

Таким образом,

$$\ddot{\mathbf{R}}_0 - \alpha \ddot{\mathbf{R}}_1 + \frac{\mathbf{R}_0}{|\mathbf{R}_0|^3} - \alpha \frac{\mathbf{R}_1 |\mathbf{R}_0|^2 - 3\mathbf{R}_0(\mathbf{R}_0 \mathbf{R}_1)}{|\mathbf{R}_0|^5} - \alpha \ddot{\mathbf{R}}_0 + \mathbf{F}(\mathbf{R}_0, T) = 0.$$

Приравнивая члены одного порядка по малому параметру  $\alpha$ , получим систему уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}}_0 + \frac{\mathbf{R}_0}{|\mathbf{R}_0|^3} + \mathbf{F}(\mathbf{R}_0, T) &= 0, \end{aligned} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}}_1 + \frac{\mathbf{R}_1 |\mathbf{R}_0|^2 - 3\mathbf{R}_0(\mathbf{R}_0 \mathbf{R}_1)}{|\mathbf{R}_0|^5} + \ddot{\mathbf{R}}_0 &= 0. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Дифференцируя (8), вычислим третью производную:

$$\ddot{\mathbf{R}}_0 = 3 \frac{\mathbf{R}_0(\mathbf{R}_0 \dot{\mathbf{R}}_1)}{|\mathbf{R}_0|^5} - \frac{\dot{\mathbf{R}}_0}{|\mathbf{R}_0|^3} - \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{R}_0, T). \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), получим

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}}_1 + \frac{\mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_0|^3} - \frac{3\mathbf{R}_0(\mathbf{R}_0 \mathbf{R}_1)}{|\mathbf{R}_0|^5} &= \\ = \frac{\dot{\mathbf{R}}_0}{|\mathbf{R}_0|^3} - \frac{3\mathbf{R}_0(\mathbf{R}_0 \dot{\mathbf{R}}_0)}{|\mathbf{R}_0|^5} - \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{R}_0, T). \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, для вычисления траектории электрона следует решить систему уравнений второго порядка (7), (8), (11). При этом внешняя сила в (8), согласно (2)–(4), имеет проекции

$$\begin{aligned} F_x(\mathbf{R}, T) &= d \sum_{K_x=-K_{\max}}^{K_{\max}} \sum_{K_y=-K_{\max}}^{K_{\max}} \sum_{K_z=-K_{\max}}^{K_{\max}} \frac{\sqrt{\Omega}}{K_-} \times \\ &\times \left[ K_y \cos(\mathbf{K}\mathbf{R} - \Omega T + \theta_{\mathbf{K},1}) + \right. \\ &\left. + \frac{K_x K_z}{K} \cos(\mathbf{K}\mathbf{R} - \Omega T + \theta_{\mathbf{K},2}) \right], \end{aligned}$$

$$F_y(\mathbf{R}, T) = d \sum_{K_x=-K_{\max}}^{K_{\max}} \sum_{K_y=-K_{\max}}^{K_{\max}} \sum_{K_z=-K_{\max}}^{K_{\max}} \frac{\sqrt{\Omega}}{K_-} \times$$

$$\times \left[ -K_x \cos(\mathbf{KR} - \Omega T + \theta_{\mathbf{K},1}) + \right.$$

$$\left. + \frac{K_y K_z}{K} \cos(\mathbf{KR} - \Omega T + \theta_{\mathbf{K},2}) \right],$$

$$F_z(\mathbf{R}, T) = d \sum_{K_x=-K_{\max}}^{K_{\max}} \sum_{K_y=-K_{\max}}^{K_{\max}} \sum_{K_z=-K_{\max}}^{K_{\max}} \frac{\sqrt{\Omega} K_-}{K} \times$$

$$\times \cos(\mathbf{KR} - \Omega T + \theta_{\mathbf{K},2}).$$

Здесь введены: нормированный волновой вектор  $\mathbf{K} = r_H \mathbf{k}$ , его модуль обозначен  $K = |\mathbf{K}|$ , нормированная круговая частота  $\Omega = \omega/\omega_H = KC$ , где  $C = c/v_H$  — нормированная на линейную скорость  $v_H = r_H \omega_H$  скорость света, и нормированная константа  $d = (e/mr_H) \sqrt{2h}/(\omega_H L)^3$ .

### Численный эксперимент

В результате расчетов оказалось, что электрон не падает на ядро (рис. 1). При этом следует иметь в виду, что в отсутствие внешнего флуктуационного поля уменьшение расстояния от электрона до ядра за первые пол-оборота составляет приблизительно  $1,6 \cdot 10^{-6} r_H$  ( $r_H$  — радиус первой боровской орбиты), что находится в пределах точности вычислений. С течением времени происходит деформация начальной круговой траектории: на рис. 1 представлена орбита электрона от 6-го до 10-го оборота. На 8-м

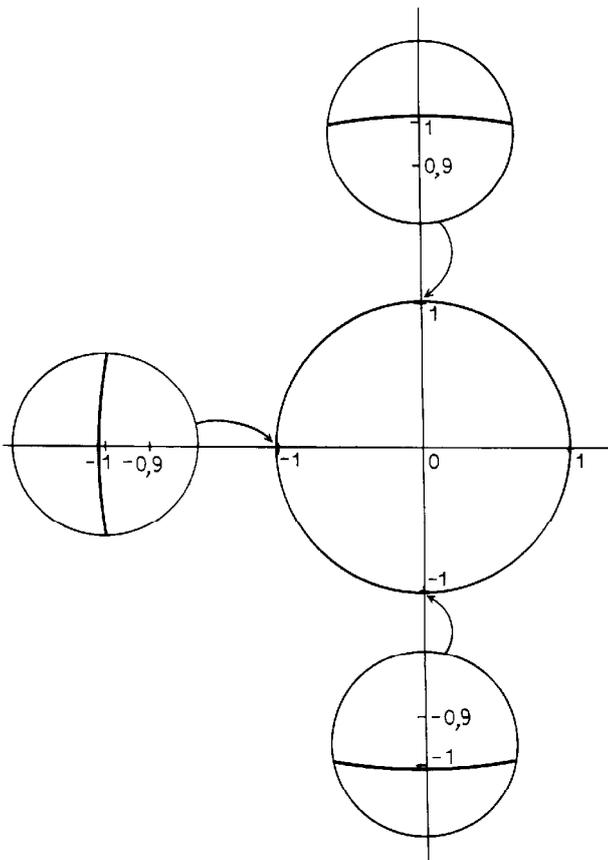


Рис. 1. Траектория электрона от 6-го до 10-го оборота (начальная траектория — круг единичного радиуса)

обороте расстояние до ядра увеличивается на 2,3% (примерно таким же является и колебание между максимальным и минимальным значением расстояния).

Система уравнений (7), (8), (11) решалась на компьютере методом Рунге–Кутты с шагом  $\Delta T = 10^{-3}$ . Для контроля еще решалась эквивалентная система (7)–(9) методом Эйлера с уменьшенным шагом ( $\Delta T = 10^{-5}$ ). Оба метода в начале траектории дали аналогичные результаты.

В качестве начальных условий задавались параметры вращения электрона по первой боровской орбите. Величины поправок  $\alpha \mathbf{R}_1$ ,  $\alpha \dot{\mathbf{R}}_1$  в начале каждого нечетного шага  $\Delta T$  полагались равными нулю, а в конце каждого четного шага, согласно (7), вычитались из  $\mathbf{R}_0$  и  $\dot{\mathbf{R}}_0$  (вычисление поправок проводилось с двойным шагом  $2\Delta T$ ). Длина квантования составляла  $L = 10^{-4}$  см. Время эволюции соответственно не превышало десяти периодов обращения электрона.

Количество слагаемых в (1) ограничивалось памятью компьютера и составляло  $2 \cdot 201^3 - 2$  (два слагаемых, соответствующих  $k = 0$ , нулевые). При этом модуль внешней силы примерно на 2–3 порядка был меньше кулоновской силы. Увеличение числа слагаемых ведет к увеличению внешней силы. Поэтому вопрос о достаточности такого числа слагаемых остается открытым. Интервал модовых частот  $\omega_k$  при указанном выше числе слагаемых включает круговую частоту вращения электрона  $\omega_H$  по первой боровской орбите, которую можно рассматривать как резонансную.

Шаг вычислений составлял  $\Delta T = 10^{-3}$ . При уменьшении шага в два раза в начале траектории изменений практически не наблюдалось.

### Заключение

К приведенным результатам следует относиться достаточно осторожно. Помимо того, что, как указано выше, число слагаемых при вычислении флуктуационного поля, возможно, недостаточно, следует иметь в виду следующее.

1. Квантовая теория дает нулевой орбитальный момент электрона на  $S$ -орбитах атома водорода [7]. Поэтому по сравнению с круговой траекторией более корректным представляется результат работы [4, с. 99] (возвратно-поступательное движение электрона в радиальном направлении). При этом электрон никогда не достигает ядра, а орбитальный момент его равен нулю.

2. Согласно [3], рассмотренная модель флуктуаций вакуума не во всем соответствует квантовой статистике нулевых флуктуаций. С точки зрения авторов [3], правильнее рассматривать моды со случайными амплитудами и фазами.

3. Опасение вызывает тот факт, что ряд, описывающий внешнее поле (1), расходится.

4. Возможно, следовало учесть воздействие внешнего поля на протон и его движение.

Отметим также следующее. В работе [8] показано, что учет дисперсионных свойств приводит к выводу о стабильности связанного электрона и дискретности его спектра в рамках классической электродинамики. Модель вакуумных флуктуаций как континуума электромагнитных мод при этом не использована. С другой стороны, в монографии [4] на основании гипотезы реального существования нулевых квантовых флуктуаций выведено уравнение Шрёдингера, из которого, разумеется, следует и стабильность атома, и дискретность его уровней.

Автор благодарен А. Б. Васильевой, Б. И. Волкову, В. А. Выслоуху, С. С. Задорожному за обсуждения и помощь в программировании.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 96-15-96673 по поддержке ведущих научных школ).

**П р и л о ж е н и е**

**Вычисление проекций внешнего поля, входящих в выражения (2)–(4)**

Рассмотрим две моды с ортогональными поляризациями и волновым вектором  $\mathbf{k}$  (рис. 2). Вектор напряженности первой моды обозначим как  $\mathbf{E}_1$  (нижний индекс  $\mathbf{k}$  опускаем) и положим его принадлежащим к плоскости  $xOy$ . Второй вектор  $\mathbf{E}_2$  будет перпендикулярен  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{k}$ . Возникающую неоднозначность направления (знака) вектора  $\mathbf{E}_1$  устраним следующей договоренностью. Пусть векторы  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$  и  $\mathbf{k}$  образуют правую тройку и проекция вектора  $\mathbf{E}_2$  на ось  $z$  будет не положительной. При этом проекции  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  на оси системы координат будут описываться формулами (2)–(4). В случае  $k_{\perp} = 0$  и  $k_z > 0$  полагаем  $E_x = E_1$  и  $E_y = E_2$ , а при  $k_{\perp} = 0$  и  $k_z < 0$  полагаем  $E_x = E_1$  и  $E_y = -E_2$ . (Эти «тонкости» по-видимому, излишни, так как моды предполагаются независимыми.) Здесь  $E_{1,2} = |\mathbf{E}_{1,2}|$ .

Вычислим далее амплитуду  $E_k$ . Энергия гармонически изменяющейся во времени электромагнитной волны представляет собой сумму двух равных составляющих — электрической и магнитной [9, с. 387]. Поэтому на электрическую составляющую вакуумной моды приходится энергия  $(1/8\pi) \int_{L^3} d^3\mathbf{r} E_{\mathbf{k},\sigma}^2(\mathbf{r}, t) = \hbar\omega/4$ . Поскольку

$$\int_{x_0}^{x_0+L} dx \cos^2(\pi n_x x/L - \omega t) = L/2, \text{ для амплитуды мод полу-}$$

чим (здесь  $\hbar$  не перечеркнутая!)  $E_k = \sqrt{2\hbar\omega_k/L^3}$ , например, для моды с частотой  $\omega_H$  при  $L = 10^{-4}$  см нормированная амплитуда силы  $F$  приблизительно равна  $1,36 \cdot 10^{-6}$  (для сравнения отметим, что нормированная кулоновская сила,

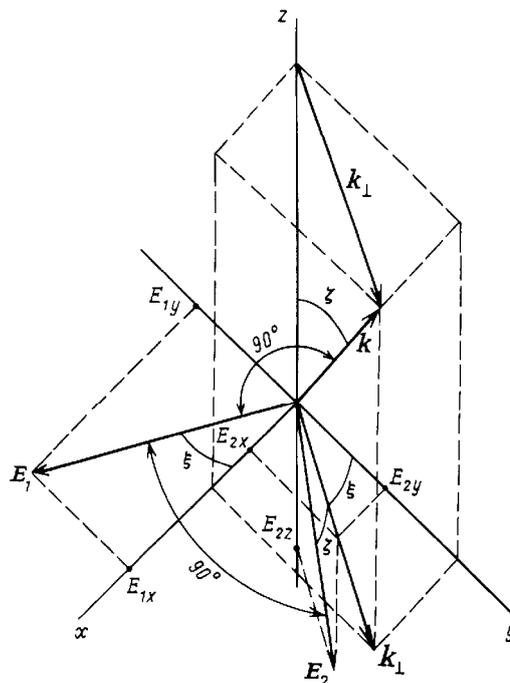


Рис. 2. К вычислению проекций векторов  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$ , перпендикулярных волновому вектору  $\mathbf{k}$ :  $\mathbf{k}_{\perp}$  — проекция  $\mathbf{k}$  на плоскость  $xOy$ . В промежуточных вычислениях можно использовать соотношения  $\sin \xi = k_x/k_{\perp}$ ,  $\cos \xi = k_y/k_{\perp}$ ,  $\sin \zeta = k_{\perp}/k$ ,  $\cos \zeta = k_z/k$

действующая на электрон на первой боровской орбите, равна единице).

**Литература**

1. Boyer T.H. // Phys. Rev. 1975. **D11**. P. 790.
2. Puthoff H.E. // Phys. Rev. 1987. **D35**. P. 3266.
3. Ibison M., Haisch B. // Phys. Rev. 1996. **A54**. P. 2737.
4. Nelson E. Quantum Fluctuations. N. Y.: Princeton University Press, 1985.
5. Клышко Д.Н. Физические основы квантовой электроники. М.: Наука, 1986.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. М.: Наука, 1988.
7. Матвеев А.Н. Атомная физика. М.: Высшая школа, 1989. С. 210.
8. Ritchie B. // Laser Physics. 1995. **5**. P. 1001.
9. Дитчберн Р. Физическая оптика. М.: Наука, 1965.

Поступила в редакцию 25.06.98