

Следовательно, для пропагатора W -бозона в общей R_ξ -калибровке в скрещенном электромагнитном поле справедливо представление

$$\begin{aligned} G_{\beta\mu}^{R_\xi}(x, x') &\equiv G_{\beta\mu}^{\alpha=1-\xi}(x, x') = \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \Delta_{\beta\rho}^{R_\xi} \Omega_\mu^\rho(x, x') \exp\{i\Gamma(x, x')\} = \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[g_{\beta\rho} - \frac{\pi_\beta \pi_\rho}{M_W^2} \left[1 - \frac{p^2 - M_W^2}{(p^2 - M_W^2/\xi)} \right] \right] \times \\ &\quad \times \Omega_\mu^\rho(x, x') \exp\{i\Gamma(x, x')\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где явный вид $\Gamma(x, x')$ приведен в (2).

При соответствующем выборе значения параметра ξ , фиксирующего калибровку, формула (7) дает выражение для пропагатора W -бозона в скрещенном электромагнитном поле для случаев фейнмановской и унитарной калибровок.

Если в формуле (7) «выключить» электромагнитное поле ($A_\mu \rightarrow 0$), то получится известный результат (см., напр., [10]) для пропагатора W -бозона в R_ξ -калибровке в вакууме. Кроме того, явный вид пропагатора W -бозона в R_ξ -калибровке позволяет строго обосновать дополнительную процедуру, которая была проведена с целью получения конечного результата при расчетах в унитарной калибровке полевого W -бозонного вклада в аномальный маг-

нитный момент заряженного лептона [1, 3]. С использованием (7) можно также получить замкнутое выражение [7] для магнитного момента ν_e , точно учитывающее зависимость от отношений масс частиц (m_ν/m_W и m_e/m_W), участвующих в соответствующем процессе.

Литература

1. Тернов И.М., Родионов В.Н., Перес-Фернандес В.К., Студеникин А.И. // Изв. вузов, Физика. 1985. № 12. С. 55.
2. Студеникин А.И., Тернов А.И. // Изв. вузов, Физика. 1992. № 6. С. 65.
3. Студеникин А.И. // ЖЭТФ. 1990. 97. С. 1407; Studenikin A. // Results and Perspectives in Particle Physics: Frascati Physics Series (Italy) / Ed. M. Greco. 1998. V. 12. P. 247.
4. Жуковский В.Ч., Шония Т.Л., Эминов П.А. // ЖЭТФ. 1993. 104. С. 3269.
5. Elmfors P., Persson D., Skagerstam B. // Nucl. Phys. 1996. B464. P. 153.
6. Erdas A., Kim C., Lee T. // E-print Archives: hep-ph/9804318.
7. Egorov A.M., Lobanov A.E., Studenikin A.I. // New Worlds in Astroparticle Physics / Ed. A. Mourao. Singapore: World Scientific, 1999; E-print Archives: hep-ph/9902447.
8. Путыс В.И. // Тр. ФИАН. М.: Наука, 1979. Т. 111. С. 5.
9. Студеникин А.И. // Изв. вузов, Физика. 1988. № 8. С. 126; Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М. (МГУ), 1992.
10. Fujikawa K., Lee B., Sanda A. // Phys. Rev. 1972. D7. P. 2923.

Поступила в редакцию
11.01.99

УДК 519.2:534

О ЗАДАЧЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ИЗМЕРЕНИЯ ПРИ НЕЧЕТКОЙ МОДЕЛИ ЭКСПЕРИМЕНТА

Т. В. Матвеева, Ю. П. Пытьев

(кафедра компьютерных методов физики)

Показано, каким образом априорная нечеткость модели эксперимента определяет нечеткость интерпретации измерений.

Введение

Для решения линейной статистической задачи интерпретации измерений требуется знание моментов первого и второго порядков случайных ошибок, в то время как на практике эти знания обычно нечетки, носят качественный характер и не могут быть использованы в рамках теоретико-вероятностных методов. Для использования нечеткой информации о математической модели эксперимента в работе предлагается теоретико-возможностный подход [1]. Приведем необходимые для дальнейшего изложения результаты по методам редукции измерений и теории возможностей [1, 2].

Пусть схема измерений представлена в виде

$$\xi = Af + \nu, \quad (1)$$

где ξ — искаженный шумом $\nu \in \mathcal{R}$ выходной сигнал Af прибора A , на вход которого поступил сигнал

$f \in \tilde{\mathcal{R}}$ от измеряемого объекта и среды; $\mathcal{R}, \tilde{\mathcal{R}}$ — конечномерные евклидовы пространства; A — линейный оператор, моделирующий измерительный прибор. В задаче редукции измерения задан линейный оператор $U: \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{U}$, моделирующий связь между сигналом f и параметрами $Uf \in \mathcal{U}$ исследуемого объекта. Оператор U моделирует так называемый идеальный измерительный прибор, на выходе которого исследователь получает параметры объекта, свойственные его естественному состоянию, не искаженному измерением. В простейшей задаче редукции измерения (1) требуется определить линейный оператор $R: \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{U}$ так, чтобы преобразование $R\xi = RAf + R\nu$ наиболее точно приближало значения Uf параметров исследуемого объекта, при этом $R\xi$ можно рассматривать как искаженный шумом $R\nu$ выходной сигнал прибора RA . Описанная задача называется задачей редукции измерения к идеально-

му прибору [2]. Для ее решения необходимо задать модель схемы измерения (1). Остановимся на случае теоретико-вероятностной модели $[A, \Sigma]$, в которой шум ν является случайным элементом пространства \mathcal{R} с математическим ожиданием $\mathbf{E}\nu = 0$ и ковариационным оператором Σ^* , а f — априори произвольный элемент пространства $\tilde{\mathcal{R}}$. Оператор редукции $R: \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{U}$ определим как решение задачи на минимум для среднеквадратичной погрешности оценивания Uf посредством $R\xi$:

$$\sup_{f \in \tilde{\mathcal{R}}} \mathbf{E} \|R\xi - Uf\|^2 \sim \min_{R: \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{U}}. \quad (2)$$

Если и только если $U \in \mathcal{D}_A = \{U': \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{U}, U'(I - A^{-1}A) = 0\}$, то решение задачи (2) существует; для невырожденного ковариационного оператора Σ решение единственно и имеет вид (черточка и звездочка у оператора символизируют соответственно псевдообращение и сопряжение) [2]

$$R\xi = U(A^*\Sigma^{-1}A)^{-1}A^*\Sigma^{-1}\xi; \quad (3)$$

сопутствующая погрешность (2) оценивания Uf посредством $R\xi$ равна

$$h(U, \Sigma) = \text{Tr} U(A^*\Sigma^{-1}A)^{-1}U^*. \quad (4)$$

Если $U = I$, $\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{R}}$, операторы Σ и A^*A невырождены, то формулы (3), (4) преобразуются к простому виду:

$$R\xi = (A^*\Sigma^{-1}A)^{-1}A^*\Sigma^{-1}\xi; \quad (5)$$

$$h(I, \Sigma) = \text{Tr}(A^*\Sigma^{-1}A)^{-1}. \quad (6)$$

Приведем некоторые определения и понятия теории возможностей [1]. В данной работе для того, чтобы охарактеризовать нечеткое множество $A \subset X$, достаточно задать его характеристическую функцию $\varphi_A(\cdot): X \rightarrow [0, 1]$. Значение $\varphi_A(x)$ есть возможность включения $x \in X$ в A ; если $\varphi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$, то A — «четкое» подмножество X . Нечеткий элемент ξ , принимающий значения в X , может быть задан распределением возможностей его значений — функцией $\varphi^\xi(\cdot): X \rightarrow [0, 1]$, значение $\varphi^\xi(x)$ которой для каждого $x \in X$ определяет возможность равенства $\xi = x$. Функция $\varphi^\xi(\cdot)$ определяет распределение возможностей $P^\xi(\cdot): \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$ и соответствующее возможностное пространство $(X, \mathcal{P}(X), P^\xi(\cdot))$. Здесь $\mathcal{P}(X)$ — σ -алгебра всех подмножеств X . Возможность включения нечеткого элемента ξ в нечеткое множество A (возможность события $\xi \in A$) дается выражением

$$P_{\varphi^\xi}(\varphi_A(\cdot)) = \sup_{x \in X} \min(\varphi_A(x), \varphi^\xi(x)).$$

*) Напомним, что по определению $\Sigma x = \mathbf{E}\nu(x, \nu)$, $x \in \mathcal{R}$, и $\mathbf{E}\|\nu\|^2 = \text{Tr} \Sigma$ [2].

Равенство

$$\varphi^\eta(y) = \sup_{x \in g^{-1}(\{y\})} \varphi^\xi(x), \quad y \in Y, \quad (7)$$

определяет распределение нечеткого элемента $\eta = g(\xi)$, где функция $g(\cdot): X \rightarrow Y$.

1. Интерпретация измерения для модели с нечетким ковариационным оператором

В рассматриваемой задаче речь пойдет о нечеткой модели шума измерений. Будем считать, что в формулах (5), (6) ковариационный оператор $\Sigma: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ — нечеткий элемент с заданным распределением $\varphi^\Sigma(S) = \theta(\text{tr} S)$ возможностей его значений, где $\theta(\cdot): [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ — непрерывная, строго монотонно убывающая функция, $\theta(0) = 1$, $\varphi^\Sigma(S)$ — возможность равенства $\Sigma = S$. В таком случае равенство (6) определяет нечеткий элемент $\mathcal{R}_+ = [0, \infty)$, моделирующий среднеквадратичную погрешность редукции измерения; требуется получить распределение возможностей его значений — функцию $\varphi^h(\cdot): [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$, значение $\varphi^h(t)$ которой для каждого $t \in [0, \infty)$ определяет возможность того, что *среднеквадратичная погрешность редукции измерения равна t* . Согласно (7), для определения $\varphi^h(t)$ требуется найти

$$\varphi^h(t) = \sup_{S: t = \text{tr}(A^*S^{-1}A)^{-1}} \varphi^\Sigma(S). \quad (8)$$

Поскольку $\theta(\cdot)$ — монотонно убывающая функция, то задачу (8) можно записать в виде

$$\varphi^h(t) = \theta \left(\inf_{S: t = \text{tr}(A^*S^{-1}A)^{-1}} \text{tr} S \right). \quad (9)$$

З а м е ч а н и е. В выражениях (8), (9) предполагается невырожденность оператора S . Однако точная нижняя грань (9) не достигается на невырожденном операторе S ; можно показать, что точная нижняя грань в (9) достигается на вырожденном операторе, который является функцией оператора A^*A .

Чтобы найти решение задачи (9), введем ортонормированный базис $\{e_j\}$, $j = 1, \dots, n$, пространства \mathcal{R} , состоящий из собственных векторов самосопряженного неотрицательного оператора A^*A : $A^*Ae_j = \alpha_j^2 e_j$, $j = 1, \dots, n$, $\alpha_1^2 \leq \alpha_2^2 \leq \dots \leq \alpha_n^2$, $n = \dim \mathcal{R}$. Положительно определенный ковариационный оператор S , согласно замечанию, имеет ту же систему собственных векторов $\{e_j\}$, $j = 1, \dots, n$. Обозначим $s_j^2 = (e_j, Se_j)$, $j = 1, \dots, n$. Задача (9) примет вид

$$\varphi^h(t) = \theta \left(\min_{s_j: t = \sum_{j=1}^n s_j^2 / \alpha_j^2} \sum_{j=1}^n s_j^2 \right). \quad (10)$$

Заметим, что функция Лагранжа $\sum_{j=1}^n s_j^2 + \omega \left(t - \sum_{j=1}^n s_j^2 / \alpha_j^2 \right)$ задачи (10) по непрерывности может быть продолжена на класс всех (не только невырожденных) самосопряженных неотрицательных операторов $S = S(A^*A)$.

Теорема 1. *Решением задачи (10) является самосопряженный неотрицательный оператор $S: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, $Se_1 = t\alpha_1^2 e_1$, $Se_2 = \dots = Se_n = 0$, и распределение возможностей нечеткой погрешности*

$$\varphi^h(t) = \theta(t\alpha_1^2), \quad t \in [0, \infty). \quad (11)$$

В теореме определено маргинальное распределение возможностей ошибки редукции измерения (1). Так как совместное распределение нечеткого вектора $R\xi$ из (5) и погрешности h из (6) есть $\varphi(h, t) = \theta(\text{tr } S(r, t))$, где

$$\text{tr } S(r, t) = \sup \{ \text{tr } S | S: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}, S > 0, (A^*S^{-1}A)^{-1}A^*S^{-1}\xi = r, \text{tr}(A^*S^{-1}A)^{-1} = t \},$$

$t \in [0, \infty)$, $r \in \tilde{\mathcal{R}}$, то $\varphi^h(t) = \sup_{r \in \tilde{\mathcal{R}}} \varphi(r, t)$, $t \in [0, \infty)$, и $\varphi^h(t) \geq \varphi(r, t)$ для каждого $r \in \tilde{\mathcal{R}}$. Иначе говоря, в теореме 1 определена «максимальная нечеткость» погрешности редукции.

2. Задача редукции измерений при дополнительных «нечетких» измерениях

Пусть кроме измерения (1) выполнено измерение $\xi' = A'f + \nu'$, где $A': \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{R}$ — линейный оператор, шум $\nu' \in \mathcal{R}$ — случайный вектор с математическим ожиданием $\mathbf{E}\nu' = 0$ и ковариационным оператором Σ' . Схему с дополнительным измерением представим в виде

$$\tilde{\xi} = \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix} f + \begin{pmatrix} \nu \\ \nu' \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Рассмотрим модель измерения $[\tilde{A}, \tilde{\Sigma}]$, в которой $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$ и $\tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \Sigma' \end{pmatrix}$. Пусть операторы A^*A , Σ ,

Σ' невырождены, оператор $U = I$, $A' = I$. Погрешность оценивания (2) в этом случае задается формулой

$$\tilde{h} = \text{tr}(A^*\Sigma^{-1}A + \Sigma'^{-1})^{-1}. \quad (13)$$

Если исследователь может охарактеризовать лишь возможные значения оператора Σ' как нечеткого элемента $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, то погрешность оценивания (13) как нечеткий элемент \mathcal{R}_+ будет определяться функцией распределения возможностей $\varphi^{\tilde{h}}(\cdot)$:

$$\varphi^{\tilde{h}}(t) = \sup_{S: t = \text{tr}(A^*\Sigma^{-1}A + S^{-1})^{-1}} \varphi^{\Sigma'}(S), \quad t \in [0, \infty). \quad (14)$$

Задача (14) эквивалентна задаче

$$\varphi^{\tilde{h}}(t) = \theta \left(\min_{S: t = \text{tr}(Q + S^{-1})^{-1}} \text{tr } S \right), \quad t \in [0, \infty), \quad (15)$$

где $Q = A^*\Sigma^{-1}A$. Легко видеть, что решение задачи (15) является функцией самосопряженного неотрицательного оператора Q . Введем ортонормированный базис пространства \mathcal{R} , состоящий из собственных векторов этого оператора: $Qe_j = \alpha_j^2 e_j$, $j = 1, \dots, n$, и упорядочим его по возрастанию собственных значений: $\alpha_1^2 \leq \dots \leq \alpha_n^2$. Поскольку $S = S(Q)$, то $Se_j = \sigma_j^2 e_j$, $j = 1, \dots, n$.

Теорема 2. *Решением задачи (15) является самосопряженный неотрицательный оператор $S: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, $Se_1 = \frac{t}{1 - \alpha_1^2 t} e_1$, $Se_2 = \dots = Se_n = 0$, и функция распределения возможностей нечеткой погрешности имеет вид*

$$\varphi^h(t) = \theta \left(\frac{t}{1 - \alpha_1^2 t} \right), \quad 0 \leq t < \frac{1}{\alpha_1^2}. \quad (16)$$

Литература

1. Пытьев Ю.И. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. № 2. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1998. No. 2. P. 1).
2. Пытьев Ю.И. Математические методы интерпретации эксперимента. М., 1989.

Поступила в редакцию
08.02.99