УДК 517.9

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СИЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРОЦЕДУР

А. Б. Князев, Г. Н. Медведев, Б. И. Моргунов

(*кафедра математики*)

Рассматриваются математические модели термомеханических процессов в сильно неоднородных средах. Описана итерационная процедура определения коэффициентов асимптотических разложений уравнений термоупругости.

В монографии [1] предложен асимптотический метод решения уравнений теплопроводности, упругости и термоупругости. Для определения коэффициентов асимптотических преобразований подобных уравнений используется методика, основанная на численном интегрировании на ячейке периодичности.

В работе [2] разработаны методы определения коэффициентов асимптотических преобразований уравнений электродинамики.

В настоящей работе для частного типа периодических неоднородных сред со структурой, аналогичной изучавшейся в работе [2], также реализуется итерационная процедура.

Определение коэффициентов асимптотических преобразований уравнений термоупругости проведем для случая неоднородной среды, стратифицированной в двух направлениях: $\xi_1 = x_1/\varepsilon$, $\xi_2 = x_2/\varepsilon$. Асимптотические разложения компонент вектора перемещений и температуры имеют вид

$$u_\alpha = \bar{u}_\alpha^0 + \varepsilon u_\alpha^1 + \cdots, \quad u_3 = \bar{u}_3^0 + \varepsilon u_3^1 + \cdots, \quad v = \bar{v}^0 + \varepsilon v^1 + \cdots, \tag{1}$$

где для $\alpha = 1, 2$

$$u_\alpha^1 = U_{\alpha 1}\frac{\partial \bar{u}_1^0}{\partial x_1} + U_{\alpha 2}\frac{\partial \bar{u}_2^0}{\partial x_2} + U_{\alpha 3}\frac{\partial \bar{u}_3^0}{\partial x_3} + U_{\alpha 4}\left(\frac{\partial \bar{u}_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_2^0}{\partial x_1}\right) - U_{\alpha 5}\bar{v}^0.$$

Следуя методике, изложенной в [3], рассмотрим систему уравнений относительно $U_{11} \equiv U(\xi)$ и $U_{21} \equiv W(\xi)$ (остальные уравнения исследуются аналогично):

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\nu + \nu\frac{\partial U}{\partial \xi_1} + \lambda\frac{\partial W}{\partial \xi_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial \xi_2} + \mu\frac{\partial W}{\partial \xi_1}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\mu\frac{\partial W}{\partial \xi_1} + \mu\frac{\partial U}{\partial \xi_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\lambda + \lambda\frac{\partial U}{\partial \xi_1} + \nu\frac{\partial W}{\partial \xi_2}\right) = 0. \tag{2}$$

Предположим, что функции $\lambda(\xi)$, $\mu(\xi)$, $\nu(\xi) = \lambda(\xi) + 2\mu(\xi)$ в (2) имеют структуру, аналогичную рассматривавшейся в работе [2]:

$$\lambda(\xi) = \lambda_0 + \lambda_1(\xi), \quad \mu(\xi) = \mu_0 + \mu_1(\xi), \quad \nu(\xi) = \nu_0 + \nu_1(\xi). \tag{3}$$

Для решения уравнений (2), (3) предлагается итерационная процедура, являющаяся обобщением процедуры (8) из [2]:

$$\begin{aligned} &\nu_0\frac{\partial^2 U^{n+1}}{\partial \xi_1^2} + (\nu_0 - \mu_0)\frac{\partial^2 W^{n+1}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \mu_0\frac{\partial^2 U^{n+1}}{\partial \xi_2^2} = \\ &\qquad = -F^1(U^n, W^n), \\ &\mu_0\frac{\partial^2 W^{n+1}}{\partial \xi_1^2} + (\nu_0 - \mu_0)\frac{\partial^2 U^{n+1}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \nu_0\frac{\partial^2 W^{n+1}}{\partial \xi_2^2} = \\ &\qquad = -F^2(U^n, W^n), \quad n = 0, 1, \ldots, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} F^1(U^n, W^n) &= \frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\nu_1 + \nu_1\frac{\partial U^n}{\partial \xi_1} + \lambda_1\frac{\partial W^n}{\partial \xi_2}\right) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\mu_1\frac{\partial U^n}{\partial \xi_2} + \mu_1\frac{\partial W^n}{\partial \xi_1}\right), \\ F^2(U^n, W^n) &= \frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\mu_1\frac{\partial W^n}{\partial \xi_1} + \mu_1\frac{\partial U^n}{\partial \xi_2}\right) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\lambda_1 + \lambda_1\frac{\partial U^n}{\partial \xi_1} + \nu_1\frac{\partial W^n}{\partial \xi_2}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

В качестве начальной итерации в (4) принимаются $U^0 = 0$, $W^0 = 0$.

Решения (4), удовлетворяющие условиям 2π-периодичности, представляются в виде рядов Фурье:

$$\begin{aligned} U^{n+1}(\xi) &= \sum_{k_1, k_2} U_{k_1 k_2}^{n+1} \exp(i k_\gamma \xi_\gamma), \\ W^{n+1}(\xi) &= \sum_{k_1, k_2} W_{k_1 k_2}^{n+1} \exp(i k_\gamma \xi_\gamma). \end{aligned} \tag{6}$$

Коэффициенты Фурье $U_{k_1 k_2}^{n+1}$, $W_{k_1 k_2}^{n+1}$ в (6) определяются из системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \varkappa_{k_1 k_2}^1 U_{k_1 k_2}^{n+1} + \varkappa_{k_1 k_2} W_{k_1 k_2}^{n+1} &= F_{k_1 k_2}^1, \\ \varkappa_{k_1 k_2} U_{k_1 k_2}^{n+1} + \varkappa_{k_1 k_2}^2 W_{k_1 k_2}^{n+1} &= F_{k_1 k_2}^2. \end{aligned} \tag{7}$$

В (7) использованы обозначения:

$$\varkappa^1_{k_1k_2} = \nu_0\varkappa_1^2 + \mu_0\varkappa_2^2, \quad \varkappa_{k_1k_2} = (\nu_0 - \mu_0)\varkappa_1\varkappa_2,$$
$$\varkappa^2_{k_1k_2} = \mu_0\varkappa_1^2 + \nu_0\varkappa_2^2,$$

$F^{1,2}_{k_1k_2}$ — коэффициенты Фурье функций (5). Заметим, что определитель $\Delta_{k_1k_2}$ системы (7) равен $\mu_0\nu_0(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2)^2$.

Функции u_3^1 и v^1, входящие в разложения составляющей u_3 перемещения и температуры v, имеют вид

$$u_3^1 = U_{31}\left(\frac{\partial\bar u_1^0}{\partial x_3} + \frac{\partial\bar u_3^0}{\partial x_1}\right) + U_{32}\left(\frac{\partial\bar u_2^0}{\partial x_3} + \frac{\partial\bar u_3^0}{\partial x_2}\right),$$
$$v^1 = V_1\frac{\partial\bar v^0}{\partial x_1} + V_2\frac{\partial\bar v^0}{\partial x_2},$$

где функции $U_{3\beta}(\xi)$ и V_β, $\beta = 1, 2$, являются решениями уравнений, аналогичных исследовавшимся в [2]:

$$\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\left[\mu(\xi)\left(\frac{\partial U_{3\beta}}{\partial\xi_\alpha} + \delta_{\alpha\beta}\right)\right] = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\left[k(\xi)\left(\frac{\partial V_\beta}{\partial\xi_\alpha} + \delta_{\alpha\beta}\right)\right] = 0 \tag{8}$$

(здесь $k(\xi) = k_0 + k_1(\xi)$ — коэффициент теплопроводности, имеющий структуру, аналогичную $\lambda(\xi)$ и $\mu(\xi)$).

Для решения (8) с указанными $\mu(\xi)$ и $k(\xi)$ можно использовать итерационные процедуры типа использовавшихся в [2]:

$$\mu_0\Delta_\xi U_{3\beta}^{n+1} = -\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\left[\mu_1(\xi)\left(\frac{\partial U_{3\beta}^n}{\partial\xi_\alpha} + \delta_{\alpha\beta}\right)\right] \equiv -\Phi_\beta^n,$$
$$\nu_0\Delta_\xi V_\beta^{n+1} = -\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\left[k_1(\xi)\left(\frac{\partial V_\beta^n}{\partial\xi_\alpha} + \delta_{\alpha\beta}\right)\right] \equiv -\Psi_\beta^n. \tag{9}$$

Решения (9) можно строить в виде рядов Фурье:

$$U_{3\beta}^{n+1} = \sum_{k_1,k_2} U_{3\beta k_1k_2}^{n+1}\exp(ik_\gamma\xi_\gamma),$$
$$V_\beta^{n+1} = \sum_{k_1,k_2} V_{\beta k_1k_2}^{n+1}\exp(ik_\gamma\xi_\gamma). \tag{10}$$

Коэффициенты Фурье в (10) определяются из уравнений

$$\mu_0(k_1^2+k_2^2)U_{3\beta k_1k_2}^{n+1} = \Phi_{\beta k_1k_2}^n,$$
$$k_0(k_1^2+k_2^2)V_{\beta k_1k_2}^{n+1} = \Psi_{\beta k_1k_2}^n \tag{11}$$

($\Phi_{\beta k_1k_2}^n, \Psi_{\beta k_1k_2}^n$ — коэффициенты Фурье функций Φ_β^n, Ψ_β^n из (9)).

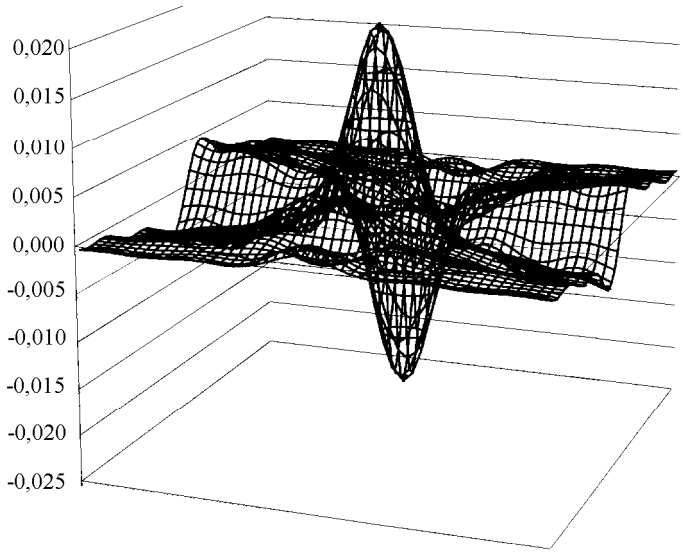

Рис. 1

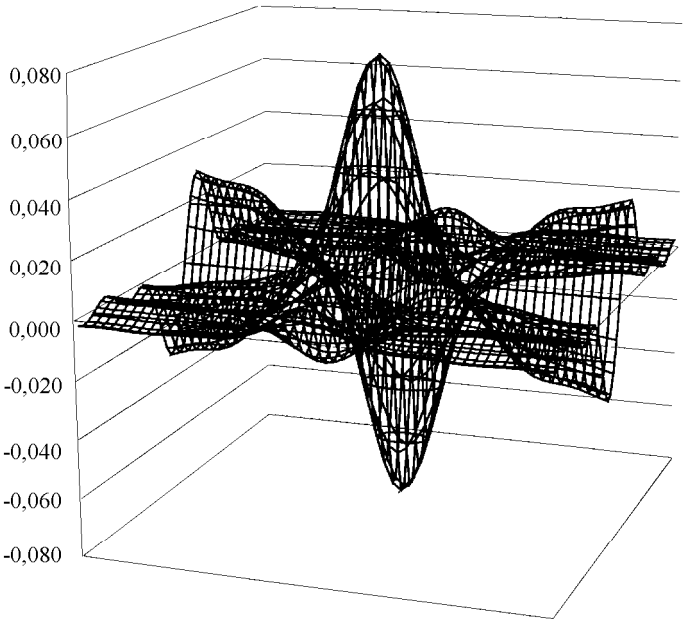

Рис. 2

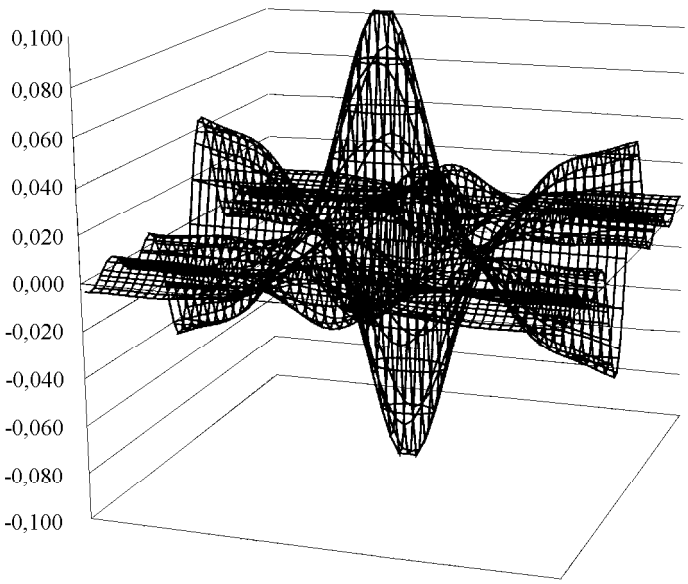

Рис. 3

На рис. 1–3 приведены результаты применения итерационной процедуры для уравнения теплопроводности (первая, восьмая и четырнадцатая итерации для функции V_1 на ячейке $2\pi \times 2\pi$), иллюстрирующие эффективность предлагаемой методики.

Литература

1. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
2. *Медведев Г.Н., Моргунов Б.И.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. № 6. С. 47 (Moscow University Phys. Bull. 1998. No. 6).
3. *Моргунов Б.И.* Математический анализ физико-механических процессов. М.: Изд-во МГИЭМ, 1995.

Поступила в редакцию
31.03.99

РАДИОФИЗИКА

УДК 621.391.81

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРОГОНКИ ДЛЯ РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТОВ ОТРАЖЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТРУКТУРЫ ПОЛЯ В НЕОДНОРОДНОЙ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ ИОНОСФЕРЕ

В. Д. Гусев, Е. Г. Михайлова, Л. И. Приходько

(*кафедра физики атмосферы*)

Предложены алгоритмы расчета комплексных коэффициентов отражения и нахождения структуры поля в неоднородной среде с высотным профилем эффективной частоты электронных соударений. Используемый метод прогонки позволяет рассматривать случаи как частичного, так и почти полного отражения волн от слоя и найти частотную зависимость коэффициента отражения.

При радиозондировании ионосферы и определении характеристик отраженного радиосигнала необходимо учитывать поглощение волн в ионосфере, которое существенно влияет на интенсивность принимаемых сигналов. Затухание радиоволн в ионосферной плазме связано с потерями, обусловленными соударениями электронов с нейтральными частицами. Эти потери приводят к отличной от нуля проводимости, а диэлектрическая проницаемость плазмы становится комплексной величиной. В реальных условиях ионосферного распространения эффективная частота электронных соударений ν_{eff} зависит от высоты. Об этом свидетельствуют как экспериментальные данные [1, 2], так и расчеты сечений соударений электронов с различными компонентами ионосферы. Полная частота электронных соударений в многокомпонентной плазме равна сумме эффективных частот соударений с различными компонентами (N_2, O_2, He, O, H): $\nu_{\text{eff}} = \sum_m \nu_m$. На рис. 1 приведены кривые зависимости ν_{eff} от высоты, построенные на основе табличных данных [3] для моделей дневной и ночной ионосферы. Область высот относится к ионосферному слою E.

Учет высотной зависимости $\nu_{\text{eff}}(z)$ при нахождении комплексных коэффициентов отражения существенно усложняет решение краевой задачи, описываемой для монохроматических волн уравнением Гельмгольца. Так, для общепринятой модели изотропной плоскослоистой ионосферы комплексная диэлектрическая проницаемость принимает вид

$$\varepsilon_k(z) = \varepsilon(z) + i\Big(1 - \varepsilon(z)\Big)\nu_{\text{eff}}(z)/\omega, \qquad (1)$$

где ω — частота радиоволн.

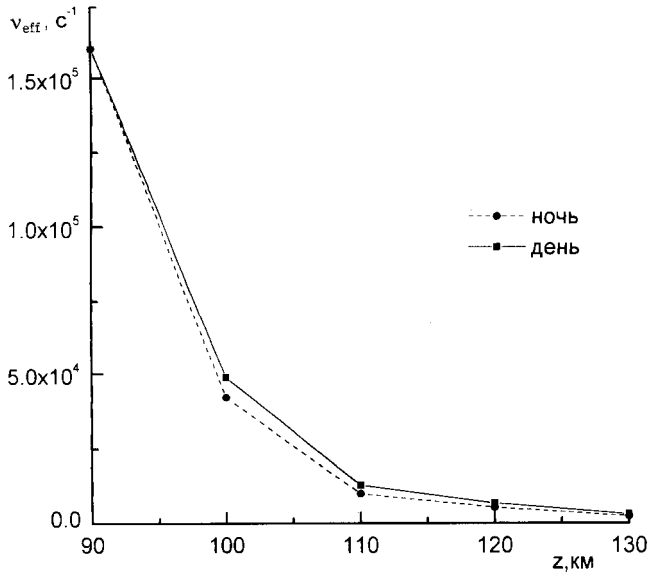

Рис. 1

Для учета дифракционных эффектов и тонких волновых явлений необходимо точное решение уравнения Гельмгольца для функции (1). Однако даже для простейших модельных ионосферных слоев получить аналитическое решение задачи не представляется возможным. Это обусловливает необходимость применения и развития численных методов расчета комплексных коэффициентов отражения и прохождения радиоволн для неоднородных ионосферных слоев. Так, в работах [4–6] разработаны численные алгоритмы, позволяющие рассчитывать отражение и прохождение радиоволн в ионосферных слоях произ-