ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.2:534

О СОДЕРЖАТЕЛЬНОМ ТОЛКОВАНИИ ВОЗМОЖНОСТИ И НЕОБХОДИМОСТИ

Ю. П. Пытьев

(*кафедра компьютерных методов физики*)

Сформулирован принцип относительности в теории возможностей, согласно которому содержательно истолкованы могут быть лишь те аспекты теоретико-возможностной модели, которые не изменяются при изменении шкал.

Введение

Принцип относительности в физике, как известно, декларирует физическую эквивалентность всех инерциальных систем отсчета. Это означает, что математическая формулировка любого закона природы должна быть одной и той же в любой инерциальной системе отсчета, в координатах которой формулируется закон, или, более формально, должна быть инвариантна относительно преобразований группы Лоренца, определяющих как преобразования координат при замене одной инерциальной системы отсчета на другую, так и преобразования всех физических величин, участвующих в формулировке закона.

В настоящей работе рассмотрены шкалы значений мер возможности и необходимости [1, 2], играющие роль систем отсчета, выбираемых исследователем, и группы автоморфизмов шкал, мер и областей их определения, относительно которых должны быть инвариантны все определения, конструкции и соотношения теории возможностей, которым может быть дано содержательное, не зависящее от выбора шкалы толкование. В этих терминах сформулирован принцип относительности в теории возможностей, согласно которому любые теоретико-возможностные заключения объявляются эквивалентными, если в некоторых шкалах их формулировки совпадают, а содержательно истолкованы могут быть лишь те аспекты теоретико-возможностной модели, которые не изменяются при изменении шкал.

Согласно этому принципу, в теории возможностей [1, 2] не могут быть содержательно истолкованы ответы на такие вопросы, как, например: чему равна возможность того или иного события, насколько (или во сколько раз) возможность одного события больше, чем другого, и т. п. (если речь не идет о значениях возможности, равных нулю или единице). В то же время утверждения типа «возможность одного события больше, меньше или равна возможности другого» звучат одинаково в любой шкале.

1. Шкалы значений возможности и необходимости. Преобразования шкал

Содержательное толкование возможности$^{*)}$, рассмотренной в работах [1–5], обусловлено свойствами шкалы $\mathcal{L}$ ее значений. Шкала $\mathcal{L}$ определена как отрезок $[0,1]$ с естественным отношением порядка, заданным неравенством «$\leqslant$», и двумя коммутативными, ассоциативными и взаимно-дистрибутивными правилами композиции — сложением «$+$» и умножением «$\bullet$»: $a+b \triangleq \max(a,b)$, $a \bullet b \triangleq \min(a,b)$, $a, b, \in [0,1]$, согласованными с упорядоченностью$^{**)}$, $\mathcal{L} \triangleq \Big([0,1], \leqslant, +, \bullet\Big)$. Нейтральные элементы — «ноль» $\mathbf{0}$ и «единица» $\mathbf{1}$ шкалы $\mathcal{L}$ совпадают соответственно с нулем и единицей отрезка $[0,1]$, $\mathbf{0}+a=a, \mathbf{0}\bullet a=\mathbf{0}$, $\mathbf{1}\bullet a=a$, $\mathbf{1}+a=\mathbf{1}$, $a\in\mathcal{L}$. На $\mathcal{L}$ определена операция $\neg(\cdot)$ «отрицания», обладающая свойствами

$$\neg(\neg(a))=a, \qquad a\leqslant b \Leftrightarrow \neg(a)\geqslant\neg(b),$$
$$\neg(a+b)=(\neg(a))\bullet(\neg(b)), \quad \neg(a\bullet b)=(\neg(a))+(\neg(b)),$$
$$a,\, b\in\mathcal{L}, \quad \neg(\mathbf{0})=\mathbf{1}, \quad \neg(\mathbf{1})=\mathbf{0},$$

и порождающая шкалу $\tilde{\mathcal{L}}=\neg(\mathcal{L})$, дуально изоморфную $\mathcal{L}^{***)}$. В шкале $\tilde{\mathcal{L}}=\Big([0,1], \tilde{\leqslant}, \tilde{+}, \tilde{\bullet}\Big)$ $\tilde{\mathbf{0}}\triangleq 1$, $\tilde{\mathbf{1}}\triangleq 0$, упорядоченность $\tilde{\leqslant}$ «противоположна» естественной: $a\,\tilde{\leqslant}\,b \Leftrightarrow a\geqslant b$, так что $\tilde{\mathbf{0}}\,\tilde{\leqslant}\,\tilde{\mathbf{1}}$, $a\,\tilde{+}\,b=\min(a,b)$, $a\,\tilde{\bullet}\,b=\max(a,b)$. $\tilde{\mathcal{L}}$ используется как шкала значений необходимости [2].

Свойства шкалы $\mathcal{L}=\Big([0,1], \leqslant, +, \bullet\Big)$, определяющие содержательное толкование возможности, удобно охарактеризовать в терминах преобразований, отображающих $\mathcal{L}$ (т. е. «четверку»: отрезок

$^{*)}$ Речь идет о мере возможности, определенной на некоторой σ-алгебре событий [1].

$^{**)}$ Символ «$\triangleq$» означает «равенство по определению». Шкала $\mathcal{L}$ является полной дистрибутивной структурой (решеткой), в которой $a\vee b\triangleq a+b$, $a\wedge b\triangleq a\bullet b$ [6].

$^{***)}$ Далее для простоты будем $\neg(a)$ записывать короче, как $\neg a$, $a\in[0,1]$. Взаимно однозначное соответствие $\neg(\cdot)\colon\mathcal{L}\to\tilde{\mathcal{L}}$ называется дуальным изоморфизмом (дуальным автоморфизмом, если считать, что $\neg(\cdot)\colon\ \mathcal{L}\to\mathcal{L}$), или инволюцией. Обычно полагают $\neg a=1-a$, $a\in[0,1]$. Можно выбрать $\neg_\beta=\beta\neg\beta^{-1}$, где $\beta(\cdot)$ — любое строго монотонное преобразование $[0,1]\to[0,1]$. Если, например, $\beta a=a^{1/\alpha}$, $\alpha>0$, то инволюция $\neg_\beta$ будет определена формулой $\neg_\beta a=(1-a^\alpha)^{1/\alpha}$.

$[0,1]$, упорядоченность $\leqslant$ и операции $+$ и $\bullet$) в себя. Пусть Γ — группа преобразований $\gamma(\cdot)$: $[0,1] \to [0,1]$, задаваемых непрерывными монотонно возрастающими функциями $\gamma(\cdot)$, такими, что $\gamma(0)=0$, $\gamma(1)=1$. Очевидно, шкала $\mathcal{L}$ инвариантна относительно преобразований $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ и, наоборот, Γ есть множество непрерывных преобразований $\gamma(\cdot)$: $[0,1] \to [0,1]$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{gathered} a \in [0,1] \Leftrightarrow \gamma(a) \in [0,1], \quad a \leqslant b \Leftrightarrow \gamma(a) \leqslant \gamma(b), \\ \gamma(a+b) = \gamma(a) + \gamma(b), \quad \gamma(a \bullet b) = \gamma(a) \bullet \gamma(b), \\ \gamma(0)=0, \quad \gamma(1)=1, \quad a,b \in [0,1]. \end{gathered} \tag{1}$$

Иначе говоря, Γ — группа всех монотонных (сохраняющих упорядоченность) автоморфизмов шкалы $\mathcal{L} = \big([0,1], \leqslant, +, \bullet\big)$.

2. Возможность и необходимость нечеткого события. Преобразования. Эквивариантность

В основе теории возможностей лежит конструкция меры $p(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$, определенной на классе $\mathcal{L}(X)$ ($\mathcal{A}$-измеримых) функций $f(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$, принимающей значения в шкале $\mathcal{L}$, линейной:

$$\begin{gathered} p((a \bullet f)(\cdot) + (b \bullet g)(\cdot)) = (a \bullet p(f(\cdot))) + (b \bullet p(g(\cdot))), \\ a,b \in [0,1], \quad f(\cdot),\, g(\cdot) \in \mathcal{L}(X), \end{gathered} \tag{2}$$

и счетно-аддитивной: $p\left(\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{+}} f_n\right)(\cdot)\right) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{+}} p(f_n(\cdot))$, $\{f_n(\cdot)\} \subset \mathcal{L}(X)$. Класс $\mathcal{L}(X)$ наделен частичной упорядоченностью: $f(\cdot) \leqslant g(\cdot) \Leftrightarrow f(x) \leqslant g(x)$, $x \in X$, и двумя правилами композициии $(f+g)(x) \triangleq f(x) + g(x)$, $(f \bullet g)(x) = f(x) \bullet g(x)$, $x \in X$, согласованными с правилами композиции, принятыми в $\mathcal{L}$. Кроме того, в $\mathcal{L}(X)$ определены счетные операции*): $\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{+}} f_n\right)(x) \triangleq \overset{\infty}{\underset{n=1}{+}} f_n(x)$, $\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\bullet}} f_n\right)(x) \triangleq \overset{\infty}{\underset{n=1}{\bullet}} f_n(x)$, $x \in X$, а также операция умножения на константу $(a \bullet f)(x) \triangleq a \bullet f(x)$, $x \in X$, $a \in [0,1]$, что вместе с операцией сложения наделяет $\mathcal{L}$ чертами линейности. Функция $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ в теории возможностей называется характеристической функцией (х.ф.) нечеткого события; «четкое» событие отличается тем, что его х.ф. принимает лишь два значения: 0 или 1. Величина $p(f(\cdot))$ называется возможностью нечеткого события с х.ф. $f(\cdot)$. Если $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in X \setminus A, \end{cases}$ $x \in X$ — х.ф. «четкого» события $A \in \mathcal{A}$, то $P(A) \triangleq p(\chi_A(\cdot))$ называется возможностью A [1].

В $\mathcal{L}(X)$ определена операция «отрицания», которую обозначим символом $\neg\circ$, использованным

*) Класс $\mathcal{L}(X)$ — полная дистрибутивная решетка [6], в которой $(f \vee g)(\cdot) \triangleq (f+g)(\cdot)$, $(f \wedge g)(\cdot) \triangleq (f \bullet g)(\cdot)$.

с аналогичной целью ранее: $\neg\circ f(x) \equiv (\neg\circ f)(x) \triangleq \neg(f(x))$, $x \in X$. Очевидно, $f(\cdot) \leqslant g(\cdot) \Leftrightarrow \neg\circ f(\cdot) \geqslant \neg\circ g(\cdot)$, $\neg\circ(\neg\circ f)(\cdot) = f(\cdot)$, $\neg\circ(f+g)(\cdot) = ((\neg\circ f) \bullet (\neg\circ g))(\cdot)$, $\neg\circ(f \bullet g)(\cdot) = ((\neg\circ f) + (\neg\circ g))(\cdot)$, $f(\cdot), g(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$.

Класс $\tilde{\mathcal{L}}(X) = \{\neg\circ f(\cdot),\ f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)\}$ функций $\neg\circ f(\cdot)$: $X \to \tilde{\mathcal{L}}$, дуальный $\mathcal{L}(X) = \{\neg\circ f(\cdot),\ f(\cdot) \in \tilde{\mathcal{L}}(X)\}$, наделен упорядоченностью $\tilde{\leqslant}$: $f(\cdot) \tilde{\leqslant} g(\cdot) \Leftrightarrow f(\cdot) \geqslant g(\cdot)$ и двумя правилами композиции $\tilde{+}$ и $\tilde{\bullet}$: $(f \tilde{+} g)(x) \triangleq f(x) \tilde{+} g(x)$, $(f \tilde{\bullet} g)(x) \triangleq f(x) \tilde{\bullet} g(x)$, $x \in X$, согласованными с одноименными правилами композиции в $\tilde{\mathcal{L}}$. Класс $\tilde{\mathcal{L}}(X)$, очевидно, замкнут относительно операций, дуальных приведенным в (1).

В теории возможностей определяется мера необходимости, основанная на мере $n(\cdot)$: $\tilde{\mathcal{L}}(X) \to \tilde{\mathcal{L}}$, дуальной мере $p(\cdot)$: $\mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$. Мера $n(\cdot)$ определена как линейная:

$$n\Big((a \tilde{\bullet} f)(\cdot) \tilde{+} (b \tilde{\bullet} g)(\cdot)\Big) = (a \tilde{\bullet} n(f(\cdot))) \tilde{+} (b \tilde{\bullet} n(g(\cdot))),$$

$$a,\, b \in [0,1], \quad f(\cdot),\, g(\cdot) \in \tilde{\mathcal{L}}(X),$$

и счетно-аддитивная: $n\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\tilde{+}}} f_n(\cdot)\right) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\tilde{+}}} n(f_n(\cdot))$, $\{f_n(\cdot)\} \subset \tilde{\mathcal{L}}(X)$, функция, заданная на $\tilde{\mathcal{L}}(X)$ и принимающая значения в $\tilde{\mathcal{L}}$ [2]. Мера $p(\cdot)$, в свою очередь, дуальна мере $n(\cdot)$, и их связь фиксируется формулой

$$n(f(\cdot)) = \neg(p(\neg\circ f(\cdot))), \quad f(\cdot) \in \tilde{\mathcal{L}}(X), \tag{3}$$

или

$$p(f(\cdot)) = \neg(n(\neg\circ f(\cdot))), \quad f(\cdot) \in \mathcal{L}(X). \tag{4}$$

Группе Γ монотонных изоморфизмов шкалы $\mathcal{L}$ соответствуют две изоморфные ей группы преобразований: группа $\Gamma\circ$ монотонных изоморфизмов класса $\mathcal{L}(X)$, определенных равенством $(\gamma \circ f)(x) \triangleq \gamma(f(x))$, $x \in X$, $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, устанавливающим взаимно однозначное соответствие $\Gamma\circ \ni \gamma\circ \Leftrightarrow \gamma(\cdot) \in \Gamma$, и группа $\Gamma*$ изоморфизмов класса мер $p(\cdot)$: $\mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$,

$$(\gamma * p)(f(\cdot)) \triangleq \gamma(p(\gamma^{-1} \circ f(\cdot))), \quad f(\cdot) \in \mathcal{L}(X). \tag{5}$$

При этом также имеет место взаимно однозначное соответствие $\Gamma* \ni \gamma* \Leftrightarrow \gamma(\cdot) \in \Gamma$.

Что касается группы $\Gamma\circ$, то очевидно, что $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X) \Leftrightarrow \gamma \circ f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, т.е. $f(\cdot) \leqslant g(\cdot) \Leftrightarrow ((\gamma \circ f) \leqslant (\gamma \circ g))(\cdot)$; $\gamma \circ (f+g)(\cdot) = ((\gamma \circ f) + (\gamma \circ g))(\cdot)$; $\gamma \circ (f \bullet g)(\cdot) = ((\gamma \circ f) \bullet (\gamma \circ g))(\cdot)$. Отсюда и из условия (2) следует, что

$$\begin{gathered} (\gamma * p)\,((a \bullet f)(\cdot) + (b \bullet g)(\cdot)) = \\ = a \bullet (\gamma * p)(f(\cdot)) + b \bullet (\gamma * p)(g(\cdot)), \end{gathered} \tag{6}$$

а также что

$$(\gamma * p)\left(\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{+}} f_n\right)(\cdot)\right) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{+}} (\gamma * p)(f_n(\cdot)). \qquad (7)$$

Равенства (6) и (7) показывают, что $(\gamma * p)(\cdot)$: $\mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ — мера для любого $\gamma(\cdot) \in \Gamma$. Равенство (5) назовем условием *эквивариантности* меры $p(\cdot)$ по отношению к преобразованию $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ шкалы ее значений $\mathcal{L}$. Заметим, что если одновременно с преобразованием $\gamma(\cdot)$ шкалы $\mathcal{L}$ преобразуется аргумент меры: $f(\cdot) \to (\gamma \circ f)(\cdot)$, то условие (5) следует записать в виде

$$(\gamma * p)(\gamma \circ f(\cdot)) = \gamma(p(f(\cdot))), \qquad (5^*)$$

определяющем эквивариантность меры $p(\cdot)$ относительно одновременных преобразований $\gamma(\cdot)$ шкалы $\mathcal{L}$ и $\gamma\circ$ ее аргумента: $f(\cdot) \to \gamma \circ f(\cdot)$.

Если, в частности, в (5) $f(x) = \chi_A(x)$, $x \in X$, — характеристическая функция множества A, то условие (5) дает формулу для преобразования возможности $P(\cdot)$:

$$\begin{aligned} P(A) \overset{\Delta}{=} p(\chi_A(\cdot)) \to \gamma * p(\chi_A(\cdot)) = \\ = \gamma(p(\chi_A(\cdot))) = \gamma(P(A)) \end{aligned} \qquad (5^{**})$$

(ибо $\gamma^{-1} \circ \chi_A(\cdot) = \chi_A(\cdot)$), индуцированного преобразованием $\gamma(\cdot)$ шкалы $\mathcal{L}$; формула (5^{**}) называется условием *эквивариантности возможности* $P(\cdot)$: $\mathcal{A} \to \mathcal{L}$.

Примеры. Пусть $f(x) = \overset{n}{\underset{k=1}{+}} (a_k \bullet \chi_{A_k}(x))$, $x \in X$, — кусочно-постоянная функция на $\mathcal{L}(X)$, где $a_k \in [0,1]$, $\chi_{A_k}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_k, \\ 0, & x \in X \setminus A_k,\ x \in X, \end{cases}$ — характеристическая функция ($\mathcal{A}$-измеримого) множества A_k, причем $A_k \cap A_s = \varnothing$, если $k \neq s$, $k, s = 1, \dots, n$, и $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = X$. Тогда, согласно (5),

$$\begin{aligned} (\gamma * p)\left(\overset{n}{\underset{k=1}{+}} (a_k \bullet \chi_{A_k}(\cdot))\right) = \\ = \overset{n}{\underset{k=1}{+}} (a_k \bullet \gamma(p(\chi_{A_k}(\cdot)))) = \overset{n}{\underset{k=1}{+}} (a_k \bullet \gamma(P(A_k))), \end{aligned}$$

где $P(A_k) = p(\chi_{A_k}(\cdot))$ — возможность A_k, $k = 1, \dots, n$ [1].

Если возможность $P(\cdot)$ имеет распределение $\varphi(\cdot)$: $X \to \mathcal{L}$ $(\mathcal{A} = \mathcal{P}(X))$, то $p(f(\cdot)) \equiv p_\varphi(f(\cdot)) = \sup\limits_{x \in X} \min(f(x), \varphi(x))$ и соответственно, согласно (5), $(\gamma * p_\varphi)(f(\cdot)) = \sup\limits_{x \in X} \min(f(x), \gamma \circ \varphi(x)) = p_{\gamma \circ \varphi}(f(\cdot))$.

Хотя шкалы $\mathcal{L}$ и $\tilde{\mathcal{L}}$, классы $\mathcal{L}(X)$ и $\tilde{\mathcal{L}}(X)$ и меры $p(\cdot)$: $\mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ и $n(\cdot)$: $\tilde{\mathcal{L}}(X) \to \tilde{\mathcal{L}}$ связывают условия дуальности (3), (4), преобразования $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ и $\tilde{\gamma}(\cdot) \in \Gamma$ шкал $\mathcal{L}$ и $\tilde{\mathcal{L}}$ могут быть согласованы многими способами. Пусть* $a \in \mathcal{L}$, $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{L}}$, причем $\tilde{a}$ — образ a: $\tilde{a} = \neg a$. Если $a \to \gamma a$, $\tilde{a} \to \tilde{\gamma}\tilde{a}$, то естественно считать, что $\tilde{\gamma}\tilde{a}$ — образ γa: $\tilde{\gamma}\tilde{a} = \neg_{\tilde{\gamma}\gamma}\gamma a$, где $\neg_{\tilde{\gamma}\gamma}$: $\gamma\mathcal{L} \to \tilde{\gamma}\tilde{\mathcal{L}}$. Отсюда следует, что преобразования $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, $\tilde{\gamma}(\cdot) \in \Gamma$ индуцируют преобразование $\neg \to \neg_{\tilde{\gamma}\gamma} = \tilde{\gamma}\neg\gamma^{-1}$, а поскольку должно быть выполнено условие $\neg_{\tilde{\gamma}\gamma}\neg_{\tilde{\gamma}\gamma} = 1$ (тождественное преобразование), связь между $\gamma(\cdot)$ и $\tilde{\gamma}(\cdot)$ фиксируется соотношением

$$\tilde{\gamma}\neg\gamma^{-1} = \gamma\neg\tilde{\gamma}^{-1}, \qquad (8)$$

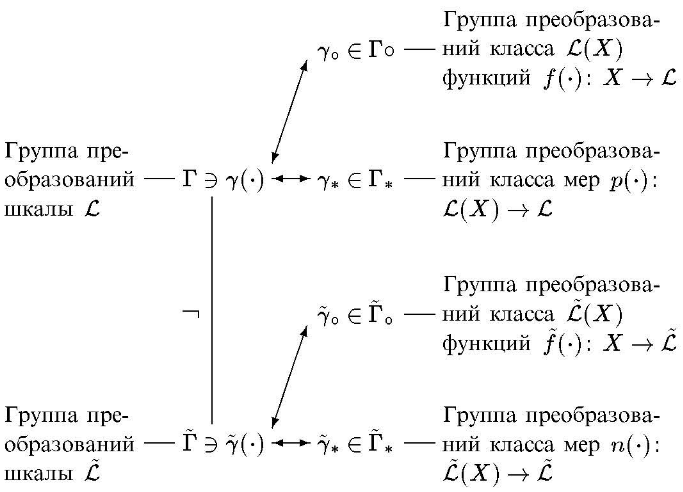
согласно которому преобразования $\gamma^{-1}\tilde{\gamma}$ и $\neg$ должны коммутировать: $\gamma^{-1}\tilde{\gamma}\neg = \neg\gamma^{-1}\tilde{\gamma}$.

Если, например, определить $\gamma(\cdot) = \tilde{\gamma}(\cdot)$, считая, что шкалы $\mathcal{L}$ и $\tilde{\mathcal{L}}$ должны преобразовываться одинаково, то условие (8) будет выполнено и $\neg_{\tilde{\gamma}\gamma} \equiv \neg_\gamma = \gamma\neg\gamma^{-1}$. Если же исходить из инвариантности $\neg$, считая, что $\neg_{\tilde{\gamma}\gamma} = \neg$, то условие (8) будет также выполнено и $\tilde{\gamma} = \neg\gamma\neg$.

При любом соглашении, связывающем преобразования $\gamma(\cdot)$ и $\tilde{\gamma}(\cdot)$, условие $\tilde{f}(\cdot) = \neg \circ f(\cdot)$, $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X), \tilde{f}(\cdot) \in \tilde{\mathcal{L}}(X)$, эквивалентно условию $\tilde{\gamma} \circ \tilde{f}(\cdot) = \neg_{\tilde{\gamma}\gamma}\gamma \circ f(\cdot)$, ибо $\neg_{\tilde{\gamma}\gamma} = \tilde{\gamma}\neg\gamma^{-1}$. В свою очередь, условия (3), (4), связывающие меры $p(\cdot)$ и $n(\cdot)$, и условия, определяющие правило преобразования инволюции $\neg$, индуцированного преобразованиями $\gamma(\cdot), \tilde{\gamma}(\cdot)$, определяют соотношение эквивариантности меры $n(\cdot)$ $\tilde{\gamma} * n(\tilde{\gamma} \circ \tilde{f}(\cdot)) = \tilde{\gamma}n(\tilde{f}(\cdot)), \tilde{f}(\cdot) \in \tilde{\mathcal{L}}(X)$, по отношению к преобразованию $\tilde{\gamma}(\cdot) \in \Gamma$, имеющее точно такой же вид, как условие эквивариантности меры $p(\cdot)$ (5^*) относительно преобразований $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ шкалы $\mathcal{L}$. Тот факт, что $\tilde{\gamma} * n(\cdot)$ — мера при любом $\tilde{\gamma}*$, проверяется так же, как аналогичное свойство меры $p(\cdot)$.

3. Принцип относительности в теории возможностей

Взаимно однозначное соответствие между рассмотренными преобразованиями удобно представить в виде следующей диаграммы.



*) Для краткости $\gamma(a))$ записывается как γa, $\tilde{\gamma}(\tilde{a})$ как $\tilde{\gamma}\tilde{a}$.

Если $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ определяет преобразование шкалы $\mathcal{L}$, то х.ф. $f_A(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$ нечеткого события A преобразуется в $\gamma \circ f_A(\cdot)$, а значение $p(f_A(\cdot))$ его возможности — в значение $\gamma * p(\gamma \circ f_A(\cdot)) = \gamma(p(f_A(\cdot)))$, отвечающее преобразованию шкалы $\mathcal{L}$. Если A — четкое событие, $\chi_A(\cdot)$ — его х.ф., то при тех же условиях $\chi_A(\cdot) \to \gamma \circ \chi_A(\cdot) \equiv \chi_A(\cdot)$ и $P(A) \triangleq p(\chi_A(\cdot)) \to \gamma * p(\gamma \circ \chi_A(\cdot)) = \gamma(P(A))$.

Следовательно, содержательный, не зависящий от выбора шкалы $\mathcal{L}$ смысл имеют не значения возможностей, а лишь соотношения «меньше», «равно» или «больше» между ними. Исключение составляют лишь значения возможности (и необходимости), равные нулю или единице, не изменяющиеся при любом преобразовании шкал. Например, неравенство возможностей $p(f_A(\cdot)) < p(f_B(\cdot))$ верно независимо от используемой шкалы, а значения $p(f_A(\cdot))$ и $p(f_B(\cdot))$ зависят от выбранной шкалы (если они отличны от нуля и единицы) и не могут быть содержательно истолкованы. Сказанное, разумеется, относится и к значениям характеристических функций $f_A(x)$ и $f_B(x)$, $x \in X$: соотношение $f_A(x) \leqslant f_B(x)$, $x \in X$, имеет один и тот же смысл в любой шкале, а значение $f_A(x)$ возможности включения $x \in X$ в нечеткое множество A, отличное от нуля и единицы, зависит от используемой шкалы и не может быть содержательно истолковано.

Поскольку все определения, конструкции и соотношения теории возможностей должны быть одинаковы в любых шкалах $\mathcal{L}$ и $\tilde{\mathcal{L}}$, они должны быть инвариантны относительно одновременных преобразований всех их компонент: $f(\cdot) \to \gamma \circ f(\cdot)$, $p(\cdot) \to \gamma * p(\cdot)$, $\tilde{f}(\cdot) \to \tilde{\gamma} \circ \tilde{f}(\cdot)$, $n(\cdot) \to \tilde{\gamma} * n(\cdot)$ и т.п., выполненных согласно диаграмме.

Например, уравнение $P(A|B) \bullet P(B) = P(A \cap B)$, определяющее условную относительно B возможность $P(A|B)$ события A [3], инвариантно относительно используемой шкалы $\mathcal{L}$, ибо оно эквивалентно уравнению $(\gamma * P(A|B)) \bullet (\gamma * P(B)) = \gamma * P(A \cap B)$ при любом $\gamma(\cdot) \in \Gamma$. Действительно, $\gamma * P(A \cap B) \triangleq \gamma(P(A \cap B)) = \gamma(P(A|B) \bullet P(B)) = \gamma(P(A|B)) \bullet \gamma(P(B)) \triangleq (\gamma * P(A|B)) \bullet (\gamma * P(B))$. Аналогично проверяется инвариантность относительно выбора $\mathcal{L}$ уравнения

$$p(f_A(\cdot)|f_B(\cdot)) \bullet p(f_B(\cdot)) = p(f_A \bullet f_B(\cdot)), \qquad (9)$$

определяющего условную относительно нечеткого события B с х.ф. $f_B(\cdot)$ возможность $p(f_A(\cdot)|f_B(\cdot))$ нечеткого события A с х.ф. $f_A(\cdot)$, а именно: уравнение (9) эквивалентно уравнению $(\gamma * p(\gamma \circ f_A(\cdot)|\gamma \circ f_B(\cdot))) \bullet (\gamma * p(\gamma \circ f_B(\cdot))) = \gamma * p((\gamma \circ f_A) \bullet (\gamma \circ f_B)(\cdot))$ при любом $\gamma(\cdot) \in \Gamma$.

P-независимость событий A и B, означающая, что $P(A) \bullet P(B) = P(A \cap B)$, эквивалентна $\gamma * P$-независимости A и B, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, а если A и B — нечеткие события с х.ф. $f_A(\cdot)$ и $f_B(\cdot)$ соответственно, то их P-независимость: $p(f_A \bullet f_B(\cdot)) = p(f_A(\cdot)) \bullet p(f_B(\cdot))$ эквивалентна $\gamma * P$-независимости нечетких событий A, B, которые в преобразованной шкале описываются х.ф. $\gamma \circ f_A(\cdot)$ и $\gamma \circ f_B(\cdot)$: $\gamma * p((\gamma \circ f_A) \bullet (\gamma \circ f_B)(\cdot)) = (\gamma * p(\gamma \circ f_A(\cdot))) \bullet (\gamma * p(\gamma \circ f_B(\cdot)))$.

При P-оптимальном оценивании нечеткого элемента ξ [7] требуется решить задачу на минимум для возможности ошибки оценивания $L(y) = p_{\varphi^\xi}(l(\cdot, y)) = \sup\limits_{x \in X} \min(\varphi^\xi(x), l(x, y)) \sim \min\limits_{y \in X}$. Множество P-оптимальных оценок $X_* = \{y \in X, L(y) = \min\limits_{\tilde{y} \in X} L(\tilde{y})\}$, очевидно, не зависит от выбора шкалы $\mathcal{L}$, ибо при переходе к новой шкале $L(y) \to \gamma(L(y))$, в то время как $X_* \to X_*$.

В работе [8] показано, как принцип относительности используется при решении теоретико-возможностной задачи интерпретации измерений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 96-01-01081).

Литература

1. *Пытьев Ю.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 3. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 3. P. 1).
2. *Пытьев Ю.П.* // Там же. 1997. № 4. С. 3 (Ibid. 1997. No. 4. P. 1).
3. *Пытьев Ю.П.* // Там же. 1997. № 6. С. 3 (Ibid. 1997. No. 6. P. 1).
4. *Пытьев Ю.П.* // Там же. 1998. № 1. С. 3 (Ibid. 1998. No. 1. P. 1).
5. *Пытьев Ю.П.* // Там же. 1998. № 2. С. 3 (Ibid. 1998. No. 2. P. 1).
6. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М.: Наука, 1984.
7. *Пытьев Ю.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. № 6. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1998. No. 6. P. 1).
8. *Пытьев Ю.П.* // Там же. 1999. № 1. С. 3 (Ibid. 1999. No. 1. P. 1).

Поступила в редакцию
29.04.98