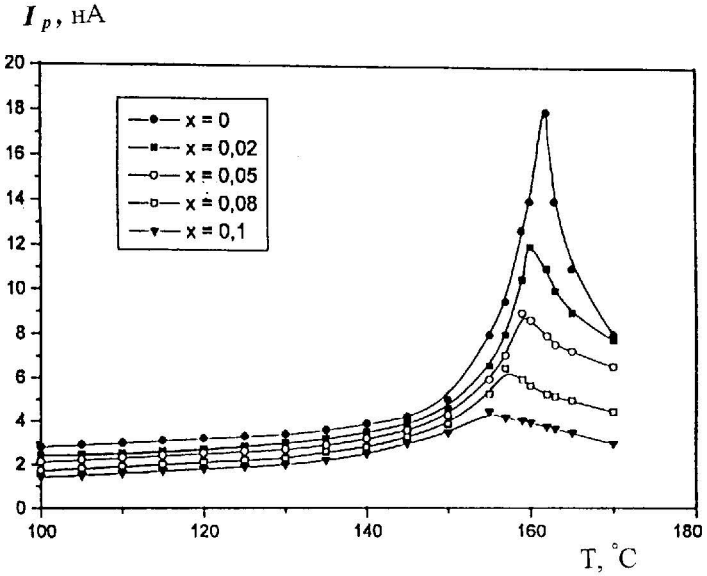


*Рис. 3.* Температурная зависимость пироэлектрического тока для тонких слоев системы $K_xNa_{1-x}NO_2$

пространственного заряда, возникающего в тонком слое соответствующего состава при поляризации его в постоянном электрическом поле.

Таким образом, данные всех электрических измерений свидетельствуют о том, что при введении примеси температура фазового перехода понижается. Это позволяет фазовую диаграмму системы представить в виде кривой *2* на рис. 2.

Наши экспериментальные данные показывают, что введение в сегнетоэлектрический нитрит натрия сравнительно небольшого количества ионов $K^+$ существенно модифицирует электрические свойства тонких слоев. Хотя при изменении $x$ полярная орторомбическая структура сохраняется вплоть до $x = 0{,}1$, введение ионов калия вызывает локальные искажения структуры несегнетоэлектрического типа; это приводит к «ухудшению» сегнетоэлектрических свойств — понижению температуры фазового перехода, спонтанной поляризации, диэлектрической проницаемости. Отмеченный выше эффект уменьшения электропроводности примесных кристаллов связан, по-видимому, с уменьшением подвижности ионов металла при возрастании ионного радиуса (ионный радиус $K^+$ равен 1,33 Å, ионов $Na^+$ — 0,95 Å).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 99-02-16319) и программы «Университеты России».

**Литература**

1. *Frazer B.C., Ueda R., Kay M.I.* // Acta Cryst. 1960. **13**. P. 705.
2. *Truter M.R.* // Acta Cryst. 1957. **7**. P. 73.
3. *Hamano K., Zhang J.* // J. Phys. Soc. Japan. 1996. **65**. P. 142.
4. *Hatta I.* // J. Phys. Soc. Japan. 1974. **38**. P. 1430.
5. *Hirotsu S., Miyamoto M.* // Japan. J. Appl. Phys. 1981. **20**. P. 12.
6. *Ziegler G.E.* // Z. Kristallogr. 1936. **A94**. P. 491.
7. *Cleaver B., Rhodes E., Ubbelode A.R.* // Proc. Roy. Soc. (Lond.) 1963. **A276**. P. 453.
8. *Tanisaki S., Ishimatsu T.* // J. Phys. Soc. Japan. 1965. **20**. P. 1277.
9. *Хаммад Т., Эль-Каббани Ф., Бард И.* // ФТТ. 1986. **28**. С. 1375.
10. *Vogt H., Zepf H.P., Ruppel W.*// Ferroelectrics. 1981. **33**. P. 53.

Поступила в редакцию
14.04.99

АСТРОНОМИЯ

УДК 521.135

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В НЕЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ТРЕУГОЛЬНЫХ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФОТОГРАВИТАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

**А. Ю. Кочеткова**

(*ГАИШ*)

**Впервые в нелинейном приближении исследованы области устойчивости треугольных точек либрации в ограниченной эллиптической фотогравитационной задаче трех тел.**

## Введение

Устойчивость треугольных точек либрации в нелинейном приближении эллиптической пространственной задачи трех тел была исследована А. П. Маркеевым [1] для системы Солнце–Юпитер. В. В. Радзиевский [2] сформулировал фотогравитационную ограниченную задачу трех тел. В настоящей работе рассмотрена более общая задача.

## Постановка задачи

Рассматриваются тела $M_1$, $M_2$ и $M_0$. Тело $M_0$ имеет бесконечно малую массу. Движение тел $M_1$ и $M_2$ определяется соотношением

$$r = p(1 + e\cos\nu)^{-1},$$

где $r$ — расстояние между $M_1$ и $M_2$, $p$ — фокальный параметр, принимаемый за единицу длины,

а истинная аномалия $\nu$ является независимой переменной. Эксцентриситет орбиты $e$ в случае ограниченной эллиптической задачи принимает значения в интервале $(0,1)$. На тело $M_0$ со стороны тел $M_1$ и $M_2$ кроме силы тяготения действует сила светового давления. Введем $Q_1$ и $Q_2$ — соответствующие телам $M_1$ и $M_2$ фотогравитационные параметры, которые равны единице при отсутствии светового давления и нулю, когда сила светового давления становится равной силе тяготения. Тогда силовая функция поля, в котором движется тело $M_0$, имеет вид

$$U = \frac{Q_1}{R_1}(1-\mu) + \frac{Q_2}{R_2}\mu,$$

где $\mu$ — отношение массы тела $M_2$ к сумме масс тел $M_1$ и $M_2$, а $R_1$ и $R_2$ — расстояния от $M_0$ до этих тел соответственно. Движение тела $M_0$ рассматриваем в координатах Нехвила [3]:

$$\xi'' - 2\eta' = \Phi\frac{\partial\Omega}{\partial\xi},$$

$$\eta'' + 2\xi' = \Phi\frac{\partial\Omega}{\partial\eta},$$

$$\zeta'' + \zeta = \Phi\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta},$$

$\Phi = (1+e\cos\nu)^{-1}$, $\Omega = 0{,}5(\xi^2+\eta^2) - 0{,}5e\cos\nu\cdot\zeta^2 + U$, $R_1^2 = (\xi+\mu)^2 + \eta^2 + \zeta^2$, $R_2^2 = (\xi+\mu-1)^2 + \eta^2 + \zeta^2$, штрихами обозначены производные по $\nu$.

Для функции Гамильтона имеем [4]:

$$H = 0{,}5(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) + p_\xi\eta - p_\eta\xi + \\ +0{,}5\Phi e\cos\nu(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) - \Phi U,$$

$p_\xi$, $p_\eta$, $p_\zeta$ — обобщенные импульсы.

### Нормализация гамильтониана

Координаты треугольных точек либрации $(\xi_0, \eta_0, 0)$ вычисляются по формулам [5]:

$$\xi_0 = 0{,}5(Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3}) + 0{,}5 - \mu,$$

$$\eta_0 = \sqrt{Q_1^{2/3} - 0{,}25\left(Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3} + 1\right)^2}.$$

Затем, переместив положение равновесия в начало координат с помощью замены

$$\xi = \xi_0 + q_1, \quad \eta = \eta_0 + q_2, \quad \zeta = q_3,$$

$$p_\xi = p_{\xi 0} + p_1, \quad p_\eta = p_{\eta 0} + p_2, \quad p_\zeta = p_3,$$

раскладываем функцию Гамильтона в ряд Тейлора в окрестности этой точки:

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots,$$

где $H_m$ — компонента $m$-й степени относительно $q_j$, $p_j$ $(j = 1,2,3)$.

Приведение квадратичной формы $H_2$ к нормальному виду осуществлялось методом, предложенным в работе [6]. Найдя характеристические показатели $\pm i\lambda_j$ линейной системы (причем $\lambda_3 = 1$) и соответствующие им собственные векторы, можно построить нормализующую матрицу. В результате $H_2$ принимает вид (в полярных координатах $r_j$, $\varphi_j$, $j = 1,2,3$): $H_2 = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + r_3$.

Нелинейная нормализация $H_m$ $(m = 3,4)$ выполнялась методом точечных отображений [7]. Суть метода заключается в следующем. Если выбрать производящую функцию $S$ преобразования, которое переводило бы систему с функцией Гамильтона $H(q_j, p_j, \nu)$ в систему $H \equiv 0$, то можно нормализовать эту функцию $S$, т.е. найти такую систему координат $\rho_j, \theta_j$, в которой $S$ имела бы наиболее простой вид. А затем по нормализованной функции отображения легко получить искомый гамильтониан в нормальном виде.

При отсутствии резонансов третьего порядка можно полностью избавиться от членов 3-й степени по $\sqrt{\rho_j}$. В найденной вышеуказанным способом системе полярных координат $\rho_j, \theta_j$ нормализованная функция Гамильтона с учетом членов до 4-го порядка включительно по $\sqrt{\rho_j}$ будет иметь вид [8]

$$H = \lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2 + \rho_3 + A\rho_1^2 + B\rho_1\rho_2 + C\rho_2^2 + \\ + \rho_3(F_1\rho_1 + F_2\rho_2 + F_3\rho_3),$$

$$F_j = D_j + E_j\sin(2\theta_3 - 2\nu) + G_j\cos(2\theta_3 - 2\nu) + \\ + K_j\sin(4\theta_3 - 4\nu) + L_j\cos(4\theta_3 - 4\nu).$$

Здесь $A$, $B$, $C$, $D_j$, $E_j$, $G_j$, $K_j$, $L_j$ не зависят от $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ и $\nu$.

Далее проверяется условие устойчивости для большинства начальных условий, когда $D = B^2 - 4AC \neq \neq 0$ и исследуется функция $F_3(\psi)$:

$$F_3(\psi) = D_3 + E_3\sin(2\psi) + G_3\cos(2\psi) + \\ + K_3\sin(4\psi) + L_3\cos(4\psi).$$

Когда существует такое $\psi$, что $F_3(\psi) = 0$ при $dF_3/d\psi \neq 0$, положение равновесия неустойчиво по Ляпунову [4].

### Вычисления и результаты

Вычисления проводились с использованием численных и аналитических средств программирования языка Matlab. Результаты вычислений представлены на рис. 1–3.

В плоскости $e, \mu$ жирная линия ограничивает область линейной устойчивости. Пунктирными линиями обозначены резонансные кривые 3-го и 4-го порядков. Тонкой линии соответствует $D = 0$, а в заштрихованных областях $D < 0$. Функция $F_3(\psi)$ принимает нулевые значения в очень узкой двумерной области, обозначенной точечной линией. На рис. 1

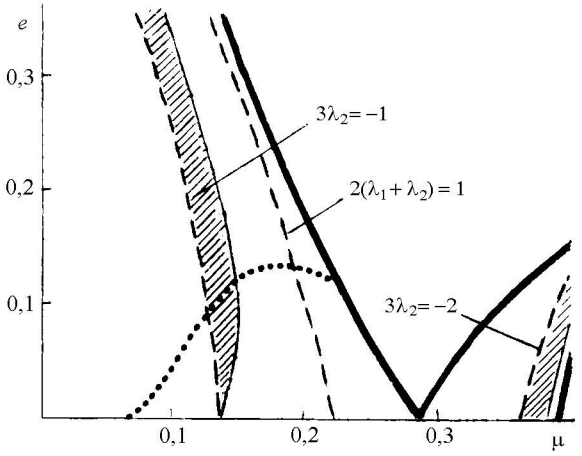


*Рис. 1*

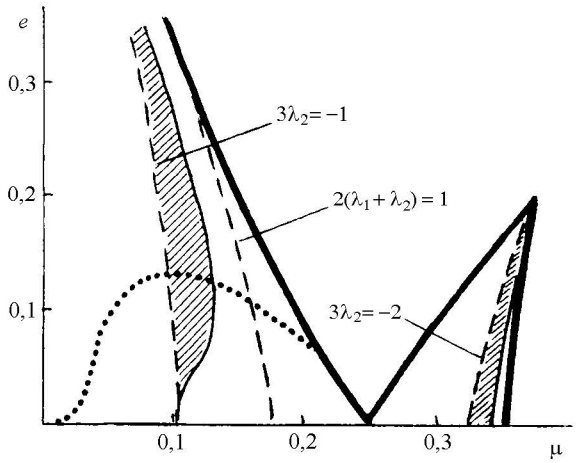


*Рис. 2*

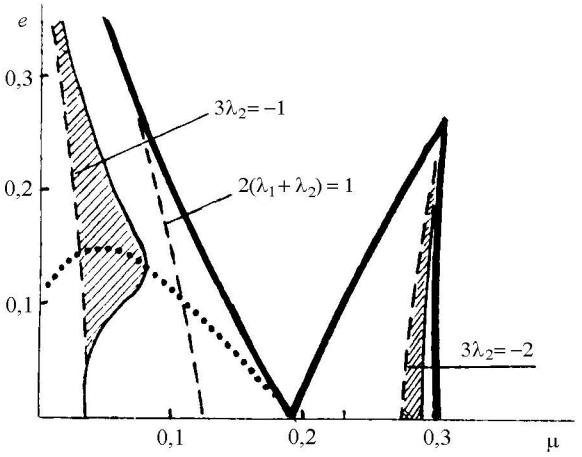


*Рис. 3*

параметры $Q_1$ и $Q_2$ равны единице. По мере уменьшения значений $Q_1$ и $Q_2$ (рис. 2 и 3) уменьшается область линейной устойчивости, резонансные кривые становятся более крутыми. Область существования $F_3(\psi) = 0$ приближается к оси $\mu = 0$, а область, в которой $D < 0$, поднимается вдоль резонансной кривой $3\lambda_2 = -1$ и становится несколько шире. На рис. 2 $Q_1 = Q_2 = 0{,}98$, а на рис. 3 $Q_1 = Q_2 = 0{,}95$. Существование линии $D = 0$ вдоль резонанса $3\lambda_2 = -2$ сохраняется, причем соответствующая ей область $D < 0$ увеличивается с уменьшением $Q_1$ и $Q_2$, но незначительно.

Случай $Q_1 \neq Q_2$ не влияет качественно на картину устойчивости [5].

## Заключение

Впервые осуществлена нелинейная нормализация до членов 4-й степени включительно гамильтониана пространственной ограниченной эллиптической фотогравитационной задачи трех тел для любых значений эксцентриситета. Получены области устойчивости для большинства начальных условий и области неустойчивости по Ляпунову треугольных точек либрации данной задачи в нелинейном приближении. Исследовано изменение этих областей в зависимости от фотогравитационных параметров.

### Литература

1. *Маркеев А.П.* // Астрон. журн. 1974. **51**, № 3. С. 217.
2. *Радзиевский В.В.* // Астрон. журн. 1953. **30**. С. 256.
3. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., 1978.
4. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М., 1978.
5. *Лукьянов Л.Г., Кочеткова А.Ю.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1996. № 5. С. 72.
6. *Маркеев А.П.* // Прикладная матем. и мех. 1972. **36**, № 5. С. 805.
7. *Неймарк Ю.И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М., 1972.
8. *Маркеев А.П.* Препринт Ин-та проблем механики. 1973. № 49.

Поступила в редакцию
17.03.99