

УДК 517.958:532.5

О МОДЕЛЬНОМ УРАВНЕНИИ СОСТАВНОГО ТИПА, ОПИСЫВАЮЩЕМ ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, А. Г. Свешников

(кафедра математики)

Исследована математическая модель, описывающая переходные процессы в полупроводниках. Показано, что исходная физическая постановка задачи редуцируется к начально-краевой задаче для уравнения высокого порядка в частных производных составного типа. При рассмотрении соответствующей одномерной начально-краевой задачи выявлено полное соответствие теоретических результатов, полученных на основе предложенной математической модели с наблюдаемым динамическим эффектом стратификации объемного заряда в полупроводнике.

1. Математическая модель

В работах [1, 2] была предложена модель для теоретического описания одного интересного явления, наблюдающегося при исследовании переходных процессов в некоторых кристаллических полупроводниках. Эффект заключался в том, что в первоначально однородном полупроводнике, облученном лазером, после помещения его в постоянное электрическое поле конденсатора наблюдалось образование слоев объемного заряда чередующихся знаков. Причем со временем толщина слоев уменьшалась, а их количество и абсолютная величина плотности объемного заряда в каждом слое увеличивались [1]. Данное явление было названо эффектом стратификации объемного заряда в полупроводнике.

Исходная система уравнений, описывающая переходные процессы в полупроводнике, имеет вид [2]

$$\Delta_3 \varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho, \quad (1)$$

$$\rho^\sigma = \rho - e(n_0 - n), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho^\sigma}{\partial t} = e \frac{n_0 - n}{\tau}, \quad (3)$$

где ρ — плотность объемного заряда в кристалле, ρ^σ — плотность объемного заряда, связанного на примесных центрах полупроводника, n_0 — равновесная концентрация электронов, n — концентрация свободных электронов, которая может быть выражена через потенциал $\varphi(x, t)$ электрического поля с помощью закона Больцмана:

$$n = n_0 \exp \frac{e\varphi}{kT_e}, \quad (4)$$

τ — характерное время жизни свободных электронов, ε — диэлектрическая проницаемость полупроводника, T_e — температура свободных электронов, $x \in \Omega$ — ограниченная область в \mathbb{R}^3 с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega \in A^{(1,\lambda)}$.

Система уравнений (1)–(4) с помощью общих методов, развитых в работе [6], при начальном условии $\rho^\sigma(x, t)|_{t=0} = 0$ в классе функций

$\varphi(x, t) \in C([0, +\infty); C^{(2)}(\Omega))$ редуцируется к одному интегродифференциальному нелинейному уравнению:

$$\Delta_3 \varphi(x, t) - \frac{4\pi e n_0}{\varepsilon} \left(f(\varphi)(x, t) + \frac{1}{\tau} \int_0^t ds f(\varphi)(x, s) \right) = 0, \quad (5)$$

$$f(\varphi) = \exp(e\varphi/kT_e) - 1.$$

В случае, если на границе области Ω задано распределение потенциала электрического поля, приходим к следующему граничному условию:

$$\varphi|_{x \in \partial\Omega} = a(x, t), \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0, \quad (6)$$

где $a(x, t) \in C^{(0)}(\partial\Omega \times [0, +\infty))$ — заданная функция. При дополнительном условии

$$\frac{|ea(x, t)|}{kT_e} < 1 \quad (7)$$

уравнение (5) может быть линеаризовано. При этом приходим к уравнению

$$\Delta_3 \varphi(x, t) - \frac{1}{r_d^2} \left(\varphi(x, t) + \frac{1}{\tau} \int_0^t ds \varphi(x, s) \right) = 0, \quad (8)$$

где $r_d = \sqrt{\varepsilon kT_e / (4\pi e^2 n_0)}$ — радиус Дебая. Выполняя естественное требование согласования начального и граничного условий, из уравнения (8) в рассматриваемом классе функций $\varphi(x, t)$ получаем, что начальное распределение потенциала электрического поля в полупроводнике удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\Delta_3 \varphi_0(x) - \frac{1}{r_d^2} \varphi_0(x) = 0, \quad (9)$$

$$\varphi_0|_{x \in \partial\Omega} = a(x, 0), \quad x \in \partial\Omega. \quad (10)$$

Если, кроме того, предположить, что $\varphi(x, t) \in C^{(1)}([0, +\infty); C^{(2)}(\Omega))$, то в данном расширенном

классе гладкости интегродифференциальное уравнение (8) эквивалентно дифференциальному уравнению в частных производных высокого порядка составного типа (см. [3–6]) с начальным условием (9)–(10):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta_3 \varphi(x, t) - \frac{1}{r_d^2} \varphi(x, t) \right) - \frac{1}{r_d^2 \tau} \varphi(x, t) = 0. \quad (11)$$

Таким образом, приходим к постановке начально-краевой задачи D_3 .

Задача D_3 . Найти непрерывную функцию $\varphi(x, t)$ в $\bar{\Omega} \times [0, +\infty)$, принадлежащую классу $C([0, +\infty); C^2(\Omega)) \cap C^1((0, +\infty); C^2(\Omega))$ и удовлетворяющую в классическом смысле уравнению (11), граничному условию (6), начальному условию (9)–(10).

Существование и единственность решения поставленной начально-краевой задачи может быть доказано методами, развитыми в предыдущих работах авторов [3–6].

В следующем разделе мы рассмотрим простейшую, но важную начально-краевую задачу в том случае, если $x \in \Omega \equiv (0, d) \subset \mathbb{R}^1$, $0 < d < +\infty$. Назовем данную задачу D_1 .

2. Анализ решения задачи D_1

Рассматриваемая задача D_1 в безразмерных переменных $x/r_d, t/\tau$ имеет вид

$$(\varphi_{xx}(x, t) - \varphi(x, t))_t - \varphi(x, t) = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} (x, t) \in (0, \beta) \times (0, +\infty), \quad \varphi|_{x=0} = V, \quad \varphi|_{x=\beta} = 0, \\ t \in [0, +\infty), \quad V \in \mathbb{R}^1, \quad \beta = d/r_d, \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad x \in [0, \beta], \end{aligned}$$

где функция $\varphi_0(x)$ — решение следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} (\varphi_0)_{xx} - \varphi_0 = 0, \quad x \in (0, \beta), \quad (13) \\ \varphi_0(0) = V, \quad \varphi_0(\beta) = 0. \end{aligned}$$

Как нетрудно убедиться, решение задачи (13) имеет вид

$$\varphi_0(x) = V \frac{e^x - e^{2\beta-x}}{1 - e^{2\beta}}. \quad (14)$$

Используя метод разделения переменных, можно построить решение задачи (12) с учетом явного вида функции $\varphi_0(x)$ (14):

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) = V \frac{2e^{2\beta}}{\beta} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + 1} \left(\exp\left(-\frac{t}{1 + \lambda_n^2}\right) - 1 \right) \times \\ \times \sin(\lambda_n x) + \varphi_0(x), \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{\beta}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (15) \end{aligned}$$

Можно проверить, что построенное решение является единственным решением задачи (12) в классе непрерывных функций на $[0, \beta] \times [0, +\infty)$,

принадлежащих классу $C([0, +\infty); C^2(0, \beta)) \cap C^1((0, +\infty); C^2(0, \beta))$.

Проведем качественный анализ полученного решения начально-краевой задачи D_1 . Поскольку в эксперименте измерялась объемная плотность заряда в полупроводнике в различные моменты времени (см. [1]), связанная с потенциалом электрического поля уравнением Пуассона (1), то можно перейти к анализу полученного решения для объемной плотности заряда, которое для удобства представим в виде

$$\rho(x, t) = \rho(x, t; N(t)) + r(x, t; N(t)), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \rho(x, t; N(t)) = V \frac{\varepsilon e^{2\beta}}{2\pi\beta r_d^2} \sum_{n=1}^{N(t)} \frac{\lambda_n^3}{\lambda_n^2 + 1} \times \\ \times \left(\exp\left(-\frac{t}{1 + \lambda_n^2}\right) - 1 \right) \sin(\lambda_n x) - \frac{\varepsilon}{4\pi r_d^2} \varphi_0(x), \\ r(x, t; N(t)) = V \frac{\varepsilon e^{2\beta}}{2\pi\beta r_d^2} \sum_{n=N(t)+1}^{+\infty} \frac{\lambda_n^3}{\lambda_n^2 + 1} \times \\ \times \left(\exp\left(-\frac{t}{1 + \lambda_n^2}\right) - 1 \right) \sin(\lambda_n x), \end{aligned}$$

где $N = N(t) \in \mathbb{N}$ — некоторая функция, определенная при $t \in [0, +\infty)$ и принимающая значения из множества натуральных чисел, конкретный вид которой будет установлен чуть позже. Пусть $t = T > 0$ — фиксированный момент времени.

Найдем то значение $z > 0$, при котором функция

$$f_T(z) = \frac{z^3}{z^2 + 1} \left(1 - \exp\left(-\frac{T}{z^2 + 1}\right) \right)$$

принимает максимальное значение. Исследование данной функции показывает, что максимум достигается в единственной точке $z_0 = z_0(T)$, определяемой уравнением

$$y = \ln\left(1 + 2y \frac{T - 2y}{T + 2y}\right), \quad y = \frac{T}{z^2 + 1},$$

причем при $T > 4$

$$\left(\frac{T - 1}{2}\right)^{1/2} \leq z_0 \leq (T - 1)^{1/2}, \quad (17)$$

$$f_T(z_0) \cong \frac{2}{3} T^{1/2}.$$

Таким образом, приходим к выводу, что для каждого момента времени $t = T$ слагаемое в выражении (16) с номером

$$n = \left[\frac{\beta z_0(t)}{\pi} \right] \quad (18)$$

в каждой точке $x \in (0, \beta)$ имеет наибольшую абсолютную величину, которая со временем растет, как \sqrt{t} ; кроме того, для каждого фиксированного

момента времени это слагаемое осциллирует по x с частотой, возрастающей со временем t .

Теперь возьмем функцию $N(t)$ в выражении (16) в виде

$$N(t) = \left[\frac{\beta z_0(t)}{\pi} \right] + m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

В силу того, что функция $\varphi_0(x)$ на интервале $(0, \beta)$ положительна, все сказанное выше переносится на первое слагаемое в выражении (16). С другой стороны, поскольку ряд в правой части (16) для функции $r(x, t; N(T))$ сходится равномерно по $(x, t) \in [0, \beta] \times [0, T]$, $0 < T < +\infty$, то для каждого фиксированного $0 < T < +\infty$ найдется такое натуральное число $m(T)$, что

$$|r(x, t; N(T))| \leq V \frac{\varepsilon e^{2\beta}}{2\pi\beta r_d^2} \exp(-T).$$

Таким образом, на основании модели, предложенной в работе [2], удалось поставить математическую начально-краевую задачу D_1 , решение которой дает полное совпадение качественной динамической картины эффекта, наблюдаемого в эксперименте (см. [1]), с результатами исследования решения

построенной математической модели. В заключение отметим, что в работе [2] была теоретически исследована аналогичная задача на полупрямой, что позволило качественно выявить наличие слоистой структуры в полупроводнике, однако динамическое развитие эффекта можно детально исследовать только при рассмотрении начально-краевых задач для уравнения составного типа (11) в ограниченных областях.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 96-01-00337).

Литература

1. Астратов В.Н., Ильинский А.В., Киселев В.А. // ФТТ. 1984. 26, № 9. С. 2843.
2. Фурман А.С. // ФТТ. 1986. 28, № 7. С. 2083.
3. Габов С.А., Свеишиков А.Г. Задачи динамики стратифицированной жидкости. М.: Наука, 1986.
4. Габов С.А., Свеишиков А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990.
5. Плетнер Ю.Д. // ЖВМ и МФ. 1992. 32, № 12. С. 1885.
6. Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свеишиков А.Г. // ЖВМ и МФ. 1999. 39, № 9. С. 1706.

Поступила в редакцию
09.12.98

АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 539.12

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕАКЦИИ УПРУГОГО πN -РАССЕЯНИЯ В ОБЛАСТИ ЭНЕРГИЙ ВОЗБУЖДЕНИЯ НУКЛОННЫХ РЕЗОНАНСОВ

В. И. Мокеев, М. В. Осипенко

(НИИЯФ)

Проведен феноменологический анализ экспериментальных данных реакции упругого πN -рассеяния в области энергий возбуждения нуклонных резонансов. Из условия наилучшего воспроизведения экспериментальных сечений получены нерезонансные амплитуды и фазы интерференции резонансных амплитуд.

Введение

Ускоритель электронов непрерывного действия TJNAF (США), введенный недавно в строй, предоставляет качественно новые возможности в исследовании структуры адронов и динамики сильных взаимодействий в эксклюзивных реакциях. Цель эксперимента E-93-006 [1], проводимого в TJNAF, состоит в определении электромагнитных формфакторов нуклонных резонансов с массами более 1,6 ГэВ, а также поиск missing-резонансов на основе анализа данных по сечениям реакции рождения фотонами пар пионов на протоне. Существует, однако, проблема описания нерезонансных процессов в реакции $\gamma p \rightarrow \pi^- \Delta^{++}$, являющейся одним из основных каналов, которые приводят к образованию двух пионов в конечном состоянии. Описание нерезонансных процессов при

$W > 1,6$ ГэВ в условиях конкуренции многих открытых неупругих каналов относится к одной из наиболее сложных проблем исследований структуры высоколежащих резонансов в электромагнитных взаимодействиях. В работах [2, 3] был использован подход [4], включающий коррекцию нерезонансных процессов, вызванную эффектами взаимодействия во входном и выходном каналах. В подходе [2, 3] нерезонансные процессы описывались минимальным набором борновских диаграмм.

Как показано в работе [3], эффекты взаимодействия в начальном состоянии (ВНС) и в конечном состоянии (ВКС) играют важную роль в описании реакции $\gamma p \rightarrow \pi^- \Delta^{++}$. Если пренебречь вкладами ВНС- и ВКС-эффектов, то при углах эмиссии пиона, больших 90° (в с.д.м.), и $W > 1,6$ ГэВ рассчитанные сечения превышают измеренные в несколько раз.