РАДИОФИЗИКА

УДК 519.246,524

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОИСКА «АСТРО-ГРАВИТАЦИОННОЙ» КОРРЕЛЯЦИИ

А. В. Гусев, В. К. Милюков

(*ГАИШ*)

Разработан адаптивный алгоритм обнаружения слабых «гравитационных» импульсов, коррелированных с астрофизическими процессами, на фоне стационарных помех с неизвестным распределением.

Введение

Обнаружение гравитационного излучения от космических объектов является одной из фундаментальных проблем экспериментальной физики. Чувствительность твердотельных криогенных гравитационных антенн, выраженная в единицах h ($h(t)$ — вариации метрики свободного пространства в поле слабой гравитационной волны), $h_{\min} \approx (10^{-19} \div 10^{-20})$Гц$^{-1/2}$, оказывается недостаточной с позиции современных астрофизических представлений (позитивный результат в гравитационно-волновом эксперименте связывается с созданием большебазовых лазерно-интерферометрических гравитационных антенн, ожидаемая чувствительность которых должна быть на один-два порядка выше). Основным преимуществом криогенных гравитационных антенн остается относительная простота (по сравнению с лазерно-интерферометрическими) их конструкции и надежность в режиме непрерывного мониторинга. Увеличить эффективную чувствительность криогенных гравитационных антенн и одновременно сохранить их эксплуатационные преимущества удается при комплексной обработке информации (КСОИ) [1, 2]. Принцип действия КСОИ основан на предварительном оценивании неизвестных моментов τ_i возникновения отдельных гравитационных импульсов (ГИ). В качестве временного репера при КСОИ используются моменты возникновения $\{\tau_{ai}\}$ космических нейтрино или космических гамма-вспышек, информацию о которых можно получить из соответствующих астрофизических каталогов (например, каталог BATSE содержит подробную информацию о моментах возникновения космических гамма-вспышек, определенных с точностью $\pm 0{,}01$ с). Применение потока событий $\{\tau_{ai}\}$ в качестве временного репера основывается на современных астрофизических сценариях космических катастроф, которые приводят к излучению гравитационных волн (взрыв сверхновых, слияние двойных нейтронных звезд и др.). На определенной стадии такие процессы могут сопровождаться также генерацией космических нейтрино (для галактических источников) или космических гамма-вспышек (для источников, удаленных на космологические расстояния). Поэтому принцип действия КСОИ можно определить следующим образом:

$$\tau_i = \tau_{ai} + \tau, \qquad i = \overline{1, N}, \tag{1}$$

где τ — неизвестный сдвиг между «гравитационными» и астрофизическими событиями, N — число астрофизических событий, моменты возникновения которых выбраны в качестве соответствующего временного репера. Возможные значения параметра τ ограничены априорным интервалом $(\tau_{\min},\, \tau_{\max})$.

Синтез синхронного накопителя слабых ГИ при КСОИ должен учитывать наличие негауссовых (в том числе импульсных) шумов на выходе гравитационной антенны. Статистические характеристики таких шумов априори оказываются неизвестными. КСОИ позволяет использовать наиболее радикальную методику преодоления подобных априорных ограничений — непараметрическую оценку неизвестной плотности вероятности шума (без выдвижения гипотезы о возможном виде этой функции) по классифицированной обучающей выборке, не содержащей ГИ.

Целью работы является разработка непараметрических методов поиска «астро-гравитационной корреляции» при наличии негауссовых шумов с неизвестными статистическими характеристиками.

1. Асимптотически оптимальный амплитудный алгоритм обнаружения сигнала при негауссовых шумах

Выходной сигнал $X(t)$ на выходе оптимального фильтра (различием в форме отдельных ГИ для криогенных гравитационных антенн пренебрегаем) представляет собой аддитивную смесь полезного («гравитационного») квазигармонического сигнала $S(t)$ и стационарного узкополосного шума $n(t)$:

$$X\,(t) = \lambda S\,(t) + n\,(t) = R\,(t) \cos\left[\cos \omega_0 t + \vartheta\,(t)\right],$$

где $R(t)$ и $\vartheta(t)$ — огибающая и фаза узкополосного процесса $X(t)$, ω_0 — резонансная частота гравитационной антенны, λ — случайная величина, принимающая на интервале наблюдения $(0, T)$ два возможных значения: $\lambda = 1$ при наличии ГИ и $\lambda = 0$ при их отсутствии.

Пусть $A(t)$ — огибающая полезного сигнала $S(t)$, $p_{1E}(E \mid A^2)$ — условная плотность вероятности случайного процесса $E(t) = R^2(t)$, Δt — временная задержка, вносимая оптимальным фильтром.

Ограничиваясь обнаружением слабого «гравитационного» сигнала $S(t)$, имеем [3]

$$p_{1E}(E|A^2) \approx p_{1E}(E|0) + \left[\frac{\partial p_{1E}(E|A^2)}{\partial A^2}\right]_{A^2=0} A^2. \quad (2)$$

Предполагая, что амплитуды A_i,

$$A_i = A(t_i), \qquad t = t_i = \tau_{ai} + \tau + \Delta t,$$

отдельных ГИ представляют собой независимые случайные величины с одинаковым априорным распределением (подобная модель хорошо согласуется с современными астрофизическими представлениями), из выражения (2) находим отношение правдоподобия [3, 4] $\Lambda_i\,[X\,|\,\tau]$ для i-го ГИ:

$$\Lambda_i\,[X\,|\,\tau] = \frac{p_{1E}(E\,|\,A^2)}{p_{1E}(E\,|\,0)} \approx 1 + \langle A^2\rangle\, f(E_i).$$

Здесь

$$f(E) = \frac{1}{p_{1E}(E\,|\,0)}\left[\frac{\partial p_{1E}(E\,|\,A^2)}{\partial A^2}\right]_{A^2=0}, \qquad (3)$$

$$E_i = E(t_i), \quad \langle A^2\rangle = \langle A_i^2\rangle, \; i = \overline{1,\,N},$$

где $\langle\ldots\rangle$ — символ статистического усреднения.

Отношение правдоподобия для некогерентной последовательности («пачки») редких ГИ можно представить в виде [4]

$$\Lambda\,[X\,|\,\tau] = \prod_{i=1}^{N} \Lambda_i\,[X\,|\,\tau].$$

Поэтому правило обнаружения «астро-гравитационной корреляции», следствием которой является выражение (1), определяется следующим образом:

$$\max_{\tau} Z_T(\tau) \geqslant C_\alpha,$$

$$Z_T(\tau) = \ln \Lambda\,[X\,|\,\tau] \approx \frac{\langle A^2\rangle}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} f(E_i) \qquad (4)$$

— выходной сигнал асимптотически оптимального обнаружителя, C_α — пороговый уровень, зависящий в приемном устройстве Неймана–Пирсона от вероятности ложной тревоги α.

Из анализа выражения (4) следует, что в состав асимптотически оптимального обнаружителя при негауссовых шумах входит дополнительный элемент — расположенный между квадратичным детектором огибающей и синхронным накопителем безынерционный нелинейный преобразователь (БНП), характеристика $f(E)$ (3) которого зависит от вида плотности вероятности $p_{1E}(E\,|\,A^2)$ квадрата огибающей $E(t)$.

Необходимую для вычисления характеристики БНП условную плотность вероятности $p_{1E}(E\,|\,A^2)$ при слабом полезном сигнале можно выразить через плотность вероятности стационарного случайного процесса $e(t) = E(t\,|\,\lambda = 0)$, используя стандартные методы преобразования плотности вероятности [3]:

$$p_{1E}(E) \approx p_{1e}(E) + p''_{1e} E A^2 + p'_{1e}(E) A^2.$$

Отсюда, принимая во внимание выражение (3), получаем

$$f(E) = \frac{1}{p_{1e}(E)}\,[p'_{1e}(E)E]'. \qquad (5)$$

Статистические характеристики наиболее важных для задач радиолокации негауссовых шумов, в том числе импульсных помех, достаточно подробно изучены (см., напр., обзор [5]). В гравитационно-волновом эксперименте вероятностный анализ степени «негауссовости» выходного шума не проводился, так как предполагалось, что применение схемы совпадений автоматически приведет к резкому подавлению интенсивной импульсной помехи. Отсутствие априорной информации о статистических свойствах возможных источников негауссовых шумов делает необходимым предварительную оценку неизвестной плотности вероятности $p_{1e}(e)$.

Пусть $\hat{p}_{1e}(e)$ — «сглаженная» оценка неизвестной плотности вероятности $p_{1e}(e)$. Тогда, учитывая выражение (5), находим характеристику $\hat{f}(E)$ БНП при адаптивном приеме:

$$\hat{f}(E) = \frac{1}{\hat{p}_{1e}(E)}\,[\hat{p}'_{1e}(E)E]'. \qquad (6)$$

Правило обнаружения «астро-гравитационной корреляции» при неизвестном распределении шума на выходе оптимального фильтра по-прежнему определяется выражением (4), где вместо функции $f(E)$ необходимо использовать ее непараметрическую оценку $\hat{f}(E)$.

2. Непараметрическое оценивание плотности вероятности (метод Парзена–Надарая)

При КСОИ для непараметрического оценивания неизвестной плотности вероятности $p_{1e}(e)$ используется классифицированная выборка, элементы которой не содержат ГИ.

Пусть $\mathbf{e} = \{e_k\}$ — классифицированная выборка с независимыми элементами, полученная по реализации стационарного случайного процесса $e(t)$, $k = \overline{1,\,n}$, $n \gg 1$,

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

— единичная функция (функция единичного скачка).

Тогда выборочная (эмпирическая) интегральная функция распределения $F^*_{1e}(e\,|\,\mathbf{e})$ стационарного случайного процесса $e(t)$ определяется следующим образом:

$$F_{1e}^*(e\,|\,\mathbf{e}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u(e-e_k). \tag{7}$$

Дифференцирование левой и правой частей формулы (7) приводит к формальной оценке $p_{1e}^*(e\,|\,\mathbf{e})$ неизвестной плотности вероятности $p_{1e}(e)$:

$$p_{1e}^*(e\,|\,\mathbf{e}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta(e-e_k), \tag{8}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция.

Метод Парзена–Надарая [3] непараметрического оценивания неизвестной плотности вероятности $p_{1e}(e)$ состоит в замене дельта-функций в выражении (8) аппроксимирующими их плавно изменяющимися функциями:

$$\hat{p}_{1e}(e\,|\,\mathbf{e}) = \frac{1}{n\Delta(n)}\sum_{k=1}^{n} K\left[\frac{e-e_k}{\Delta(n)}\right],$$

где $K(z)$ — произвольная «сглаженная» весовая функция.

В качестве возможной весовой функции $K(z)$ можно воспользоваться плотностью вероятности гауссовой случайной величины с единичной дисперсией,

$$K(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}.$$

Применение этой функции в качестве весовой при непараметрическом оценивании неизвестной плотности вероятности приводит к следующему результату:

$$\hat{p}_{1e}(E) = C\sum_{k=1}^{n} p_k. \tag{9}$$

Здесь

$$p_k = \exp\left\{-\frac{Y_k^2}{2}\right\},$$
$$Y_k = Y_k(E) = \frac{e-e_k}{\Delta(n)}, \quad C = \frac{1}{n\Delta(n)\sqrt{2\pi}}. \tag{10}$$

Подставляя выражения (9) и (10) в (6), находим сглаженную характеристику БНП при непараметрическом оценивании неизвестной плотности вероятности квадрата огибающей по методу Парзена–Надарая:

$$\hat{f}(E) = \frac{1}{\hat{p}_{1e}(E)}\left[\hat{p}_{1e}''(E)E + \hat{p}_{1e}'(E)\right] =$$
$$= \frac{1}{\Delta(n)}\left[-\frac{E}{\Delta(n)} + \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k}\sum_{k=1}^{n} Y_k\left(\frac{E}{\Delta(n)}Y_k - 1\right)\right]. \tag{11}$$

При $n\to\infty$ оценка $\hat{f}(E)$ сходится по вероятности к неизвестной функции $f(E)$ [3].

Заключение

Чувствительность твердотельных гравитационных антенн, как правило, оценивается по уровню естественных шумов системы, пересчитанных ко входу (в статистической радиофизике к естественным шумам обычно относят принципиально неустранимые тепловые и дробовые шумы). Плотность вероятности узкополосных естественных шумов на выходе антенны является гауссовой, а квадрат огибающей имеет экспоненциальное распределение:

$$p_{1e} = (1/\overline{e})\exp\{-e/\overline{e}\},$$

где (при определенной нормировке) $\overline{e} = \langle e\rangle$ — эквивалентная шумовая температура гравитационной антенны.

При экспоненциальном распределении квадрата огибающей характеристика $f(E)$ БНП оказывается линейной [3]:

$$f(E) = (E - \langle e\rangle)\,/\,(\langle e\rangle)^2. \tag{12}$$

Аномальное поведение крыльев плотности вероятности в реальном эксперименте свидетельствует о наличии негауссовых помех. В состав асимптотически оптимального амплитудного обнаружения некогерентной пачки слабых ГИ при наличии негауссовых шумов входит дополнительный элемент — БНП. Характеристика БНП, определяемая выражениями (3) и (5), зависит от вида плотности вероятности квадрата огибающей $e(t)$ узкополосного шума на выходе оптимального фильтра. При КСОИ для оценивания неизвестной плотности вероятности квадрата огибающей узкополосного шума на выходе оптимального фильтра можно использовать непараметрические методы оценивания по классифицированной обучающей выборке.

Одним из наиболее распространенных методов непараметрического оценивания неизвестной плотности вероятности является метод Парзена–Надарая [3], применение которого при конечном объеме обучающей выборки приводит к нелинейной сглаженной характеристике $\hat{f}(E)$ (11).

В гауссовом приближении (при $N \gg 1$) основным параметром, определяющим характеристики обнаружения «астро-гравитационной корреляции», является отношение сигнал-шум. Применение БНП в составе адаптивного синхронного накопителя слабых ГИ позволяет увеличить отношение сигнал-шум по сравнению с простейшим накопителем с линейной характеристикой (12). Относительное увеличение отношения сигнал-шум определяется коэффициентом асимптотической относительной эффективности $\hat{\rho}$ [3]:

$$\hat{\rho}^2(n) = \langle\hat{e}\rangle\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}^2(E)\hat{p}_{1e}(E)\,dE =$$
$$= \langle\hat{e}\rangle\,C\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}^2(E)p_k\,dE \geqslant 1, \tag{13}$$

где $\langle \hat{e} \rangle$ — выборочное среднее значение квадрата огибающей шума на выходе оптимального фильтра.

Коэффициент асимптотической относительной эффективности (13) при адаптивном поиске «астро-гравитационной корреляции» может быть вычислен только апостериорно (с помощью численных методов интегрирования).

Адаптивный алгоритм поиска «астро-гравитационной корреляции», основанный на применении непараметрического оценивания неизвестной плотности вероятности шума был тестирован на реальных экспериментальных данных, полученных на Баксанском лазерном деформографе ЛД-1 и использованных в работе [6] для синтеза линейного синхронного накопителя. Полученное для этих данных выборочное значение $\hat{\rho} \approx 3{,}1$ коэффициента асимптотической относительной эффективности свидетельствует о перспективности применения подобной методики для статистического анализа выходного сигнала криогенных гравитационных антенн.

Литература

1. *Виноградов М.П., Гусев А.В., Милюков В.К.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. №5. С. 37 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 5. P. 44).
2. *Виноградов М.П., Гусев А.В., Милюков В.К.* // Радиотехн. и электроника. 1998. **43**, №6. С. 692.
3. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989.
4. *Сосулин Ю.Г., Саликов С.Л.* // Радиотехн. и электроника. 1988. **33**, №3. С. 499.
5. *Венскаускас К.К., Малахов Л.М.* // Зарубежн. радиоэлектроника. 1978. №1. С. 95.
6. *Виноградов М.П., Гусев А.В., Милюков В.К.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. №6. С. 33 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 6. P. 41).

Поступила в редакцию
28.10.98

УДК 537.87:621.371

ЛУЧЕВАЯ РАДИОТОМОГРАФИЯ ИОНОСФЕРЫ С УЧЕТОМ РЕФРАКЦИИ

Е. С. Андреева, В. Е. Куницын, А. Ю. Попов

(*кафедра физики атмосферы*)

На примере радиотомографии ионосферы рассмотрена нелинейная постановка задачи лучевой томографии, связанная с учетом рефракции зондирующих лучей. Показано, что в случае слабой рефракции решение задач нелинейной томографии возможно как решение последовательности линейных задач, когда процесс решения задачи реализуется итерационной процедурой, в которой для расчета каждого приближения распределения показателя преломления используется лучевая траектория, полученная из предыдущего приближения.

Введение

Задачи томографии возникают в случаях, когда информация о пространственном распределении некоторой структуры выражается в виде интегралов по многообразиям меньшей размерности. Например, в экспериментах по радиотомографии ионосферы по данным спутникового радиозондирования [1–3] определяются интегралы вдоль лучей от электронной концентрации N:

$$\lambda r_e \int\limits_{\mathcal{L}[N]} N\, d\sigma = \varphi. \qquad (1)$$

Здесь r_e — классический радиус электрона, φ — «приведенная» фаза зондирующих радиосигналов. Для радиотомографического зондирования используются две волны с кратными частотами f и f_0; в частности, для проведенных томографических исследований на базе навигационных систем «Цикада» и(или) «Транзит» $f = 150$ МГц и $f_0 = (8/3)f = 400$ МГц [1–3]. При регистрации в приемном устройстве фазы радиосигналов двух частот «приводятся» к одной частоте и тогда их разность φ — «приведенная» фаза — будет пропорциональна интегралу (1). Путь интегрирования $\mathcal{L}[N]$ определяется траекторией луча, причем в случае линейной томографии можно пренебречь зависимостью $\mathcal{L}[N]$ траектории луча от искомой функции N и лучи являются прямыми. Для упомянутого варианта радиотомографии ионосферы [1–3] пренебрежение нелинейными эффектами мало влияет на точность решения. Во многих других случаях, например в сейсмической томографии, лучи при прохождении через среду искривляются достаточно сильно [4, 5] и пренебречь нелинейными эффектами нельзя. В настоящей статье будет рассмотрена нелинейная постановка задачи лучевой томографии, связанная с учетом рефракции зондирующих лучей, на примере радиотомографии ионосферы, что не ограничивает общности рассмотрения в силу подобия лучевых уравнений.

1. Лучевые траектории в нелинейной томографии

В случае линейной томографии, пренебрегая зависимостью траектории луча для зондирующей волны от характеристик среды, в системе координат h и τ [1] (аналог полярной системы координат (ρ, α) с