

где $\langle \hat{\epsilon} \rangle$ — выборочное среднее значение квадрата огибающей шума на выходе оптимального фильтра.

Коэффициент асимптотической относительной эффективности (13) при адаптивном поиске «астро-гравитационной корреляции» может быть вычислен только апостериорно (с помощью численных методов интегрирования).

Адаптивный алгоритм поиска «астро-гравитационной корреляции», основанный на применении непараметрического оценивания неизвестной плотности вероятности шума был тестирован на реальных экспериментальных данных, полученных на Баксанском лазерном деформографе ЛД-1 и использованных в работе [6] для синтеза линейного синхронного накопителя. Полученное для этих данных выборочное значение $\hat{\rho} \approx 3,1$ коэффициента асимптотической относительной эффективности свидетельствует о перспективности применения подобной методики для статистического анализа выходного сигнала криогенных гравитационных антенн.

Литература

1. Виноградов М.П., Гусев А.В., Милоков В.К. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 5. С. 37 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 5. P. 44).
2. Виноградов М.П., Гусев А.В., Милоков В.К. // Радиотехн. и электроника. 1998. 43, № 6. С. 692.
3. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989.
4. Сосулин Ю.Г., Саликов С.Л. // Радиотехн. и электроника. 1988. 33, № 3. С. 499.
5. Венскаускас К.К., Малахов Л.М. // Зарубежн. радиоэлектроника. 1978. № 1. С. 95.
6. Виноградов М.П., Гусев А.В., Милоков В.К. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 6. С. 33 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 6. P. 41).

Поступила в редакцию
28.10.98

УДК 537.87:621.371

ЛУЧЕВАЯ РАДИОТОМОГРАФИЯ ИОНОСФЕРЫ С УЧЕТОМ РЕФРАКЦИИ

Е. С. Андреева, В. Е. Куницын, А. Ю. Попов

(кафедра физики атмосферы)

На примере радиотомографии ионосферы рассмотрена нелинейная постановка задачи лучевой томографии, связанная с учетом рефракции зондирующих лучей. Показано, что в случае слабой рефракции решение задач нелинейной томографии возможно как решение последовательности линейных задач, когда процесс решения задачи реализуется итерационной процедурой, в которой для расчета каждого приближения распределения показателя преломления используется лучевая траектория, полученная из предыдущего приближения.

Введение

Задачи томографии возникают в случаях, когда информация о пространственном распределении некоторой структуры выражается в виде интегралов по многообразиям меньшей размерности. Например, в экспериментах по радиотомографии ионосферы по данным спутникового радиозондирования [1–3] определяются интегралы вдоль лучей от электронной концентрации N :

$$\lambda r_e \int_{\mathcal{L}[N]} N d\sigma = \varphi. \quad (1)$$

Здесь r_e — классический радиус электрона, φ — «приведенная» фаза зондирующих радиосигналов. Для радиотомографического зондирования используются две волны с кратными частотами f и f_0 ; в частности, для проведенных томографических исследований на базе навигационных систем «Цикада» и(или) «Транзит» $f = 150$ МГц и $f_0 = (8/3)f = 400$ МГц [1–3]. При регистрации в приемном устройстве фазы радиосигналов двух частот «приводятся» к одной частоте и тогда их раз-

ность φ — «приведенная» фаза — будет пропорциональна интегралу (1). Путь интегрирования $\mathcal{L}[N]$ определяется траекторией луча, причем в случае линейной томографии можно пренебречь зависимостью $\mathcal{L}[N]$ траектории луча от искомой функции N и лучи являются прямыми. Для упомянутого варианта радиотомографии ионосферы [1–3] пренебрежение нелинейными эффектами мало влияет на точность решения. Во многих других случаях, например в сейсмической томографии, лучи при прохождении через среду искривляются достаточно сильно [4, 5] и пренебречь нелинейными эффектами нельзя. В настоящей статье будет рассмотрена нелинейная постановка задачи лучевой томографии, связанная с учетом рефракции зондирующих лучей, на примере радиотомографии ионосферы, что не ограничивает общности рассмотрения в силу подобия лучевых уравнений.

1. Лучевые траектории в нелинейной томографии

В случае линейной томографии, пренебрегая зависимостью траектории луча для зондирующей волны от характеристик среды, в системе координат h и τ [1] (аналог полярной системы координат (ρ, α) с

началом в центре Земли: $h = \rho - R$, $\tau = R\alpha$, где R — радиус Земли), уравнение прямого луча можно записать в виде

$$h(\tau) = R \left[\frac{\cos \beta}{\cos(\beta + (\tau_i - \tau)/R)} - 1 \right], \quad (2)$$

где β — угол падения луча на приемник, отсчитываемый от вертикали, τ_i — координата приемника ($h_i = 0$).

Построение траекторий лучей в плазме описано, например, в работах [6, 7]. Можно использовать два вида записи уравнений траектории:

$$\frac{d}{d\sigma} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} \right) = \nabla n \quad (3)$$

или

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{d\mu^2} = \frac{1}{2} \nabla n^2, \quad d\mu = \frac{d\sigma}{n}. \quad (4)$$

В нелинейном случае в любой системе координат для построения траектории недостаточно знать координаты приемника и источника. Должно быть известно распределение показателя преломления (электронной концентрации):

$$n = \sqrt{1 - \frac{\eta}{f^2} N}, \quad (5)$$

причем если N измеряется в единицах 10^{12} м^{-3} , а f в мегагерцах, то коэффициент $\eta = 80,61$. Уравнения (3), (4) можно записать с помощью параметра θ , имеющего физический смысл угла рефракции [6]:

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{dh} = \frac{R}{R+h} \operatorname{tg} \theta, \\ \frac{d\theta}{dh} = \frac{1}{n(h+R)} \left(R \frac{\partial n}{\partial \tau} - \frac{h+R}{R} \frac{\partial(n(h+R))}{\partial h} \frac{d\tau}{dh} \right). \end{cases} \quad (6)$$

Таким образом, получается система нелинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка с граничными условиями — координатами (h, τ) источника и приемника. Для решения (6) применялся метод квазилинеаризации [8], позволяющий получить решение при наличии граничных условий. При этом для построения траектории достаточно, чтобы луч проходил через ионосферу и чтобы была непрерывной хотя бы первая производная показателя преломления, что достигается введением соответствующей аппроксимации проекционного оператора [1].

Было проведено компьютерное моделирование решения прямой задачи распространения лучей и обратной задачи нелинейной томографии для ряда моделей ионосферы, подобных наблюдаемым реальным ионосферным структурам. Распределения электронной концентрации в моделях задавались в диапазоне высот h от 150 до 1000 км и по координате τ в диапазоне нескольких тысяч километров. Предполагалось, что используются три приемника с координатами 0, 300 и 1000 км. Два примера таких модельных рас-

пределений даны на рис. 1, а и 2, а. Первый пример представляет собой модель главного ионосферного провала с неоднородностями на краях провала, второй — модель типичного распределения электронной концентрации при наличии перемещающихся ионосферных возмущений.

Поскольку рефракция определяется отклонением показателя преломления от единицы, то нелинейность томографической задачи будет характеризоваться в соответствии с (5) отношением концентрации к квадрату частоты зондирования. Это отношение является основным параметром, характеризующим нелинейность томографической задачи. Поэтому целесообразно разделять случаи «низкой» (когда рефракцией можно пренебречь) и «высокой» (когда рефракционные эффекты существенны) электронной концентрации. Подобное разделение

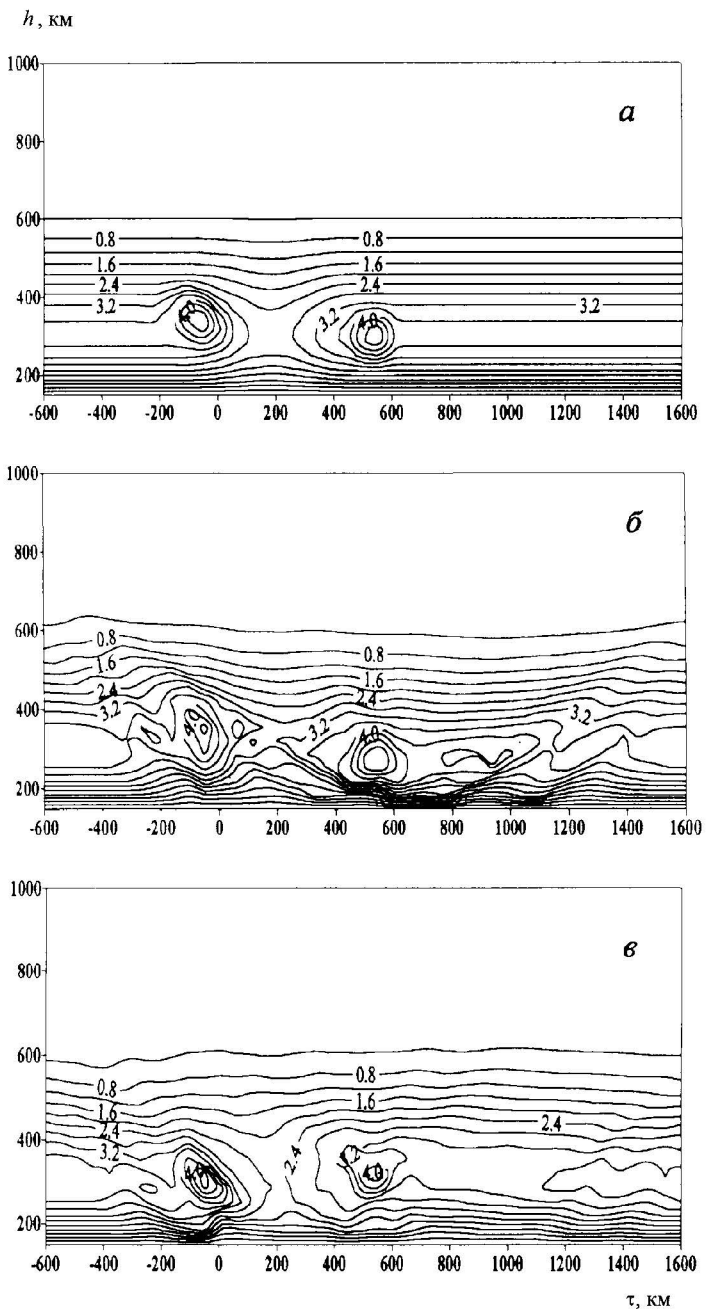


Рис. 1

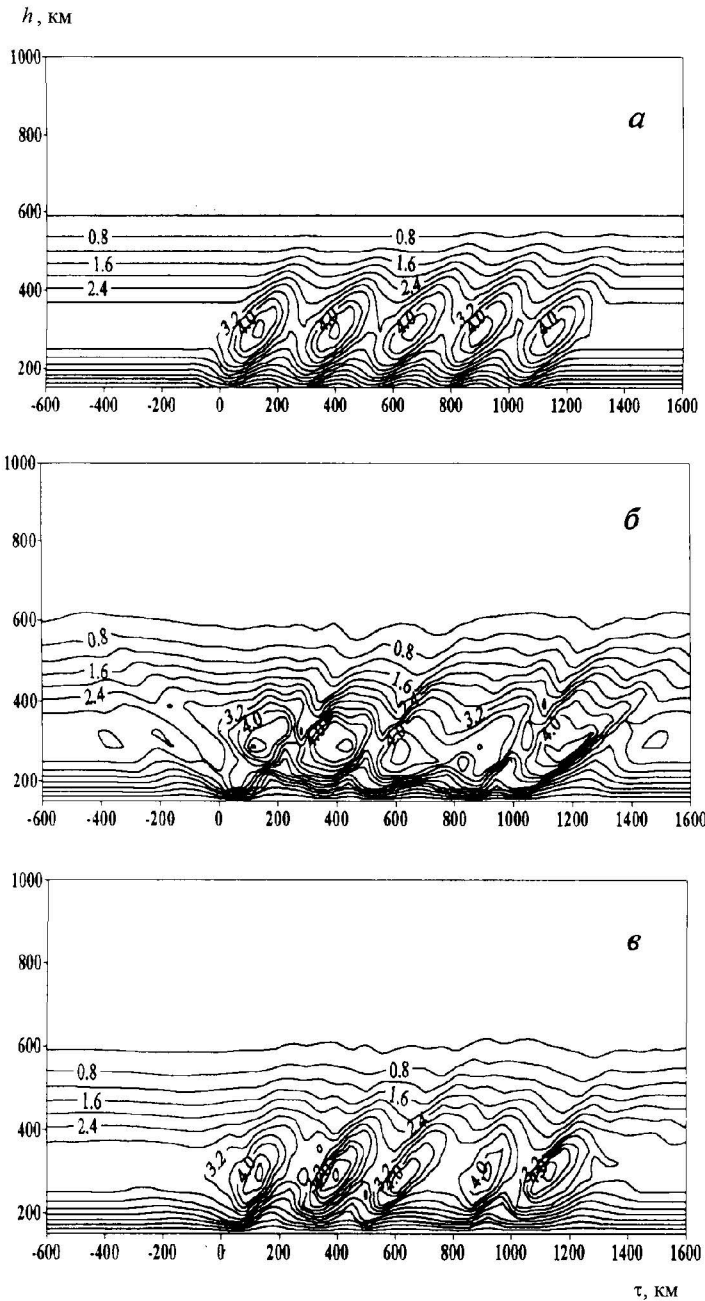


Рис. 2

условно и зависит от частоты зондирования и требуемой точности решения задачи. Например, для частоты зондирования $f = 150$ МГц [1–3] «низкой» будет электронная концентрация с максимумом $N = 0,5 \cdot 10^{12} \text{ м}^{-3}$, что типично для низкой солнечной активности, а «высокой» — при максимуме $N = 5 \cdot 10^{12} \text{ м}^{-3}$, что возможно иногда при высокой солнечной активности. Однако для частоты зондирования $f = 50$ МГц «высокой» уже будет электронная концентрация с максимумом $N = 0,5 \cdot 10^{12} \text{ м}^{-3}$.

Зависимости отклонения параметров рефрагирующего луча от параметров «прямого» луча характеризуют рефракционные и нелинейные эффекты томографической задачи. Целесообразно рассмотреть две зависимости: уравнение луча $\tau(h)$ и зависимость полного электронного содержания между приемни-

ком и источником $T(\tau_0) = \int_{(\tau_i, h=0)}^{(\tau_0, h_0)} N d\sigma$ от координаты спутника τ_0 .

Графики зависимостей $\Delta\tau(h)$, $\Delta T(\tau_0)$ показывают значимость учета нелинейных эффектов. Здесь $\Delta\tau$ и ΔT — отклонения параметров, рассчитанных с учетом рефракции, от параметров для «прямого» луча (отклонение может иметь разные знаки, так как параметр «прямого» луча просто вычитается из соответствующего параметра реального рефрагирующего луча). В качестве примера на рис. 3 и 4 приведены результаты расчетов для модели провала (см. рис. 1, а) при «высокой» электронной концентрации. На рис. 3 показан график зависимости для угла падения 80° . Кривая $\Delta\tau(h)$ имеет типичный вид: ниже максимума концентрации луч отклоняется вниз, а выше максимума — вверх от прямого луча. На рис. 4 показаны зависимости T (сплошная линия) и T_0 (штриховая) от τ_0 , где T_0 —

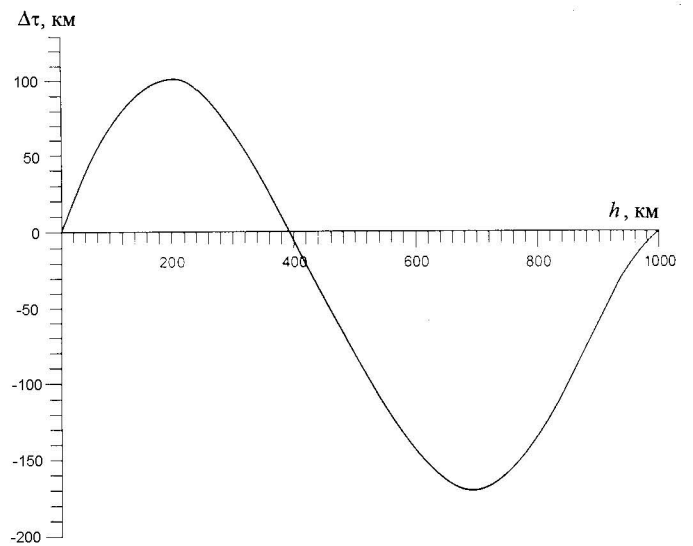


Рис. 3

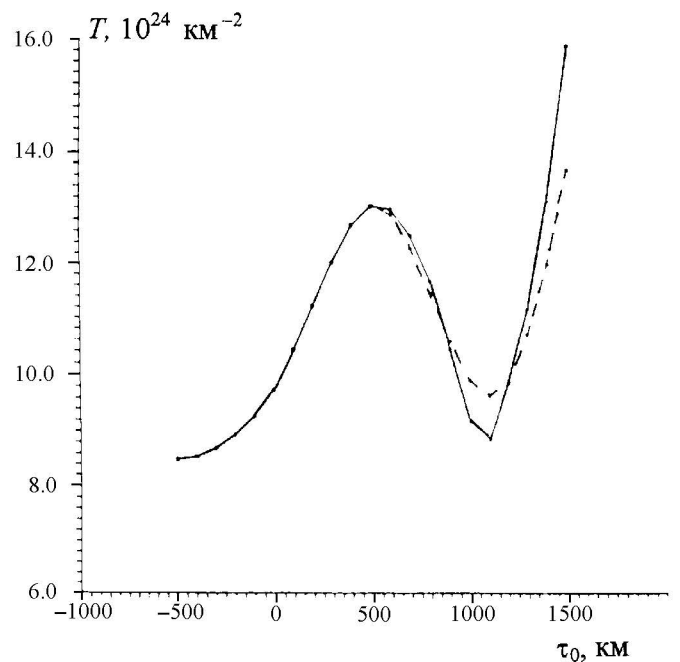


Рис. 4

значение T для «прямого» луча. Из рис. 4 видно, что влияние нелинейных эффектов на зависимость $T(\tau_0)$ растет с увеличением τ_0 , т. е. с возрастанием угла падения луча. Таким образом, пренебрежение нелинейными эффектами вносит заметную ошибку в траекторию луча и в исходные данные $T(\tau_0)$ для решения обратной задачи. Ошибка в данных $T(\tau_0)$ при угле падения 80° составляет 20% (рис. 4), а $\Delta\tau(h)$ достигает 170 км (см. рис. 3).

В случае «низкой» электронной концентрации влияние ионосферы на траекторию луча незначительно. Различие между T и T_0 для каждого значения τ_0 не превышало 1% для обеих моделей, а $\Delta\tau$ не достигало 10 км.

Из уравнения луча (6) видно, что на траекторию влияют вариации электронной концентрации. Оценки для малых отклонений луча, вызванных неоднородностями электронной концентрации ΔN с характерным размером a удобнее получить из уравнения траектории, записанного не в виде (6), а в виде «динамического уравнения», описывающего траекторию луча через «временной» параметр t , имеющий физический смысл оптической длины [6]:

$$\begin{cases} \frac{d\dot{h}}{dt} = \frac{(h+R)\dot{\tau}^2}{R^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial(n)^2}{\partial h}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{(h+R)^2}{R^2} \dot{\tau} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial(n)^2}{\partial \tau}, \end{cases} \quad (7)$$

$$\dot{h} = \frac{dh}{dt}, \quad \dot{\tau} = \frac{d\tau}{dt}.$$

Не ограничивая общности, а лишь в целях упрощения выкладок рассмотрим луч, падающий вертикально. Малое угловое отклонение луча от вертикали выражается через отношение вариации «поперечной» компоненты импульса к полному импульсу для «динамических» уравнений (4): $\Delta\chi = \Delta P_\tau / P$.

Компоненты импульса имеют вид $P_h = \dot{h}$, $P_\tau = [(R+h)/R]\dot{\tau}$, $P^2 = P_h^2 + P_\tau^2 = n^2 \approx 1$. Для вертикального падения $P_h \approx P_h(t=0) = 1$. Изменение импульса по τ описывается вторым из уравнений (7) (отличием величины $(R+h)/R$ от единицы пренебрегаем):

$$\begin{aligned} \Delta\chi \approx \Delta P_\tau &\approx \frac{1}{2} \frac{\partial(n)^2}{\partial \tau} \Delta t \approx \frac{1}{2} \frac{\partial(n)^2}{\partial \tau} a \approx \\ &\approx \frac{\eta}{2f^2} \frac{\partial N}{\partial \tau} a \approx \frac{\eta}{2f^2} \frac{\Delta N}{a/2} a = \frac{\eta \Delta N}{f^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Предполагаем, что $\Delta t \approx a$ (так как $dt = dh/n \approx \Delta h$) и градиент электронной концентрации оценивается отношением ΔN к половине размера неоднородности. После прохода через неоднородности отклонение луча Δl от «прямого» будет увеличиваться пропорционально удалению L от неоднородности:

$$\Delta l \approx \Delta\chi L \approx \frac{\eta}{f^2} \Delta N L. \quad (9)$$

При частоте зондирования 150 МГц

$$\Delta l \approx 3,6 \cdot 10^{-3} \Delta N L. \quad (10)$$

Здесь ΔN измеряется в единицах 10^{12} м^{-3} . Существен тот факт, что соотношения (8), (9) не содержат характерного размера неоднородности a , отклонение зависит лишь от масштаба электронной концентрации ΔN . Для обычных величин $\Delta N \approx (1 \div 3) \cdot 10^{12} \text{ м}^{-3}$ и путей луча $L \approx (1 \div 3) \cdot 10^3 \text{ км}$ максимальное отклонение луча от прямого может варьироваться от единиц до десятков километров при частоте зондирования $f = 150 \text{ МГц}$.

Таким образом, малые угловые и линейные отклонения луча от прямого пропорциональны величине неоднородности ΔN и не зависят от ее размеров. Для частоты зондирования 150 МГц эти отклонения не превышают 10 км для $\Delta N \leq 10^{12} \text{ м}^{-3}$, т. е. при малой солнечной активности. Однако эти отклонения могут достигать десятков километров, если $\Delta N \geq (2 \div 3) \cdot 10^{12} \text{ м}^{-3}$, т. е. когда солнечная активность высока. Из этого следует, что для частоты зондирования 150 МГц влияние нелинейных эффектов необходимо учитывать лишь при высокой солнечной активности. Использование меньших частот зондирования ($f \leq 50 \div 100 \text{ МГц}$) для томографии ионосферы увеличивает рефракцию. Итак, соотношение вариаций электронной концентрации и квадрата частоты зондирования определяет степень нелинейности томографической задачи.

2. Решение задач нелинейной лучевой томографии

В случае слабой рефракции задачи нелинейной томографии можно решать как последовательность линейных задач. Иными словами, процесс решения задачи слабонелинейной томографии можно представить как итерационную процедуру, в которой для расчета каждого приближения электронной концентрации используется траектория, полученная из предыдущего приближения электронной концентрации (в случае ионосферы):

1) исходя из априорной информации выбираем некоторое начальное приближение электронной концентрации N^0 (в качестве такого приближения можно выбрать одномерную функцию N^0 для слоистой ионосферы);

2) по известному N^{k-1} (k — номер итерации) с помощью описанного метода квазилинеаризации строим траекторию луча;

3) по известной траектории и выбранному типу аппроксимации строим матрицу проекционного оператора A^k [1];

4) с учетом особенностей метода и типа аппроксимации выбираем метод решения системы линейных уравнений (1) $AN = \varphi$, берем N^{k-1} в качестве начального приближения, решаем систему уравнений $A^k N = \varphi$ и получаем N^k ;

5) увеличиваем k на единицу и переходим к шагу 1.

3. Результаты компьютерного моделирования

Было проведено сравнение линейной и нелинейной лучевой томографии для ряда моделей ионосферы. Выводы по результатам реконструкции имеют общий характер для рассмотренных моделей. Приведем результаты реконструкций для двух моделей (см. рис. 1, *a* и рис. 2, *a*). Модели восстанавливались с учетом и без учета нелинейных эффектов. При моделировании проводились вычисления по реальным траекториям интегралов $T(\tau_0)$. При построении матрицы проекционного оператора электронная концентрация аппроксимировалась кусочно-планарно, для решения системы линейных уравнений применялись различные методы (ART с релаксацией, MART, SIRT и др.). Все эти методы приводили к близким конечным результатам, поэтому приводятся реконструкции для одного метода ART (3 итерации). Шаг по координате τ положения передатчика на орбите спутника определяет количество лучей (в расчетах количество лучей было равно 2000, разбиение сетки $\tau \times h$ составляло 50×34).

Рассмотрим ошибки в данных, возникающие за счет пренебрежения нелинейными эффектами. Во-первых, это ошибки при расчете $T(\tau_0)$, связанные с искривлением траектории; для рассматриваемых случаев и углов падения более 70° эта величина изменялась в пределах до 10%. Во-вторых, это ошибка при расчете коэффициентов матрицы оператора прямой задачи; коэффициенты определяются путем интегрирования некоторых функций [1] по траектории луча. Поскольку здесь, как и при расчете $T(\tau_0)$, ошибка возникает за счет изменения пути интегрирования по траектории луча, она имеет тот же порядок ($\leq 10\%$). В-третьих, при малом размере клетки разбиения (равном или меньше характерной величины отклонения луча) ошибка возникает за счет того, что зондирующий луч может пройти не через те клетки, что прямой. Этот вид ошибки может привести к существенному искажению результатов реконструкции. В рассмотренных случаях подобная ситуация возникла для небольшой части лучей с углом падения, большим 70° . В целом все эти три вида погрешности дают дополнительную (по отношению к ошибке аппроксимации) ошибку в данных примерно в 10–15% вследствие пренебрежения нелинейными эффектами. Из сравнения реконструкции модели, приведенной на рис. 1, *a*, для линейного случая (рис. 1, *b*) с аналогичной реконструкцией для нелинейного случая (рис. 1, *в*) видно, что качество реконструкций существенно различается; это подтверждается и ошибками реконструкции (относительные ошибки в метрике L^2 соответственно равны $\sim 46\%$ и $\sim 24\%$). На рис. 1, *b* нечетко прослеживается провал и усилена правая неоднородность, тогда как реконструкция на рис. 1, *в* хорошо соответствует модели рис. 1, *a*. Преимущество учета нелинейных эффектов точно так же видны

и из реконструкции модели, приведенной на рис. 2, *a*, в линейном (рис. 2, *b*) и в нелинейном (рис. 2, *в*) случаях: очевидно влияние рефракционных эффектов и преимущество нелинейного подхода. Ошибка в данных γ и общая ошибка реконструкции δ для модели 1, *a* в линейном случае и (в зависимости от номера итерации k) в нелинейном случае приведены в таблице. Данные таблицы иллюстрируют быструю сходимость итерационного процесса (за 2–4 итерации процесс реконструкции достигает «насыщения» и качество далее не улучшается). При сильной рефракции итерационный процесс может и расходиться.

Ошибка	Линейный подход	Нелинейный подход		
		$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$\gamma, \%$	33,02	31,91	10,16	10,20
$\delta, \%$	46,12	44,61	23,75	24,04

Проведенное компьютерное моделирование задач нелинейной радиотомографии ионосферы показало, что в случае слабой рефракции решение задач нелинейной томографии возможно как решение последовательности линейных задач. Иными словами, процесс решения задачи слабонелинейной томографии реализуется с помощью итерационной процедуры, в которой для расчета каждого приближения показателя преломления используется траектория, полученная из предыдущего приближения. Оценены условия разделения случаев сильно- и слабонелинейной томографии. Сходимость итерационной процедуры определяется при реконструкции данных после небольшого числа итераций.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 98-05-64952) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (грант А 0116).

Литература

1. Куницын В.Е., Терещенко Е.Д. Томография ионосферы. М.: Наука, 1991.
2. Kunitsyn V.E., Tereshchenko E.D. // *Antenn. Prop. Mag.* 1992. **34**. P. 22.
3. Kunitsyn V.E., Tereshchenko E.D., Andreeva E.S. et al. // *Ann. Geophys.* 1995. **13**, No. 12. P. 1351.
4. Иванссон С. // ТИИЭР. 1986. **74**, № 2. С. 99.
5. Нолет Г. Сейсмическая томография. М.: Мир, 1990.
6. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980.
7. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979.
8. Беллман Р., Каллаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968.

Поступила в редакцию
26.10.98