

и 30 Å соответственно можно говорить об образовании многослойной структуры.

Авторы выражают благодарность Г. В. Смирницкой и В. В. Бибиковой за любезно предоставленные образцы.

#### Литература

1. Рейхрудель Э.М., Смирницкая Г.В. // Итоги науки и техники. Сер. Электроника и ее применение. 1976. 8. С. 43.

2. Иверонова В.И., Ревкевич Г.П. Теория рассеяния рентгеновских лучей. 2-е изд. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.
3. Гинье А. Рентгенография кристаллов. М.: Физматгиз, 1961.
4. Чуистов К.В. Модулированные структуры в стареющих сплавах. Киев: Наукова думка, 1975.

Поступила в редакцию  
16.10.98

## ГЕОФИЗИКА

УДК 551.465.552

### О ТУРБУЛЕНТНОМ ПЕРЕНОСЕ ТЕПЛА, ИМПУЛЬСА И ВЗВЕСИ В ПЛОТНОСТНОМ ПОТОКЕ

Б. И. Самолюбов, А. В. Силаев

(кафедра физики моря и вод суши)

Исследуются особенности турбулентной диффузии тепла в суспензионном потоке по данным натурных измерений и разрабатываются методы ее теоретического описания. Предлагается оригинальный способ расчета вертикального распределения коэффициента турбулентной теплопроводности. При сопоставлении этого распределения с профилями коэффициентов переноса импульса и взвеси выявляются закономерности изменений чисел Прандтля и Шмидта по высоте над уровнем дна. Анализируются механизмы воздействия взвеси на перенос тепла в потоке с внутренней волной. Обнаруженные эффекты описываются полуэмпирической зависимостью числа Прандтля от чисел Ричардсона и Тернера.

#### Введение

Распространение придонных плотностных взвешенных потоков сопровождается загрязнением воды естественными и техногенными примесями. Загрязнения распространяются в придонных слоях с толщинами от единиц до десятков метров. Прогноз таких процессов включает определение размеров областей загрязнений и зон максимальных концентраций примесей. При разработке методов теоретического описания диффузии примесей в плотностных потоках необходимо учитывать особенности профилей коэффициентов обмена для разных субстанций, переносимых течением. Задача существенно усложняется в случаях сильного воздействия примеси одного типа на перенос другой и особенно при влиянии взвеси на энерго- и теплообмен. Изучению этих эффектов посвящена данная статья.

#### 1. Объект и методика исследований

Исследовалось суспензионное течение малой плотности ( $\Delta\rho \leq 3 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup>) в Нурекском водохранилище глубиной до 300 м, шириной 0,5 ÷ 5 км и длиной 70 км с уклоном дна  $i_s \leq 10^{-2}$  [1]. Толщина потока  $z_u = 15 \div 30$  м, скорость  $\bar{U}$  до 50 см/с (черта сверху — знак усреднения по высоте  $z_u$ ), дальность распространения до 30 км. Регистрировались пространственно-временные распределения концентрации  $S$ , профили температуры воды  $T$  и скорости течения  $U$ . Для измерений этих параметров на разрезах вдоль по потоку и на многочасовых станциях применялась специально сконструированная

аппаратура для комплексных градиентных измерений и непрерывного зондирования. Погрешности измерений  $S$ ,  $U$ ,  $T$  составляли соответственно  $(2 \div 5) \cdot 10^{-6}$  г/см<sup>3</sup> при  $S \leq (0,05 \div 5) \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup>,  $0,02^\circ\text{C}$  при  $T = 10\text{--}20^\circ\text{C}$  и 1 см/с при  $U = 10 \div 70$  см/с. Длительность одного зондирования с комплексной регистрацией профилей  $S$ ,  $T$ ,  $U$  в 20-метровом придонном слое составляла 12 мин.

#### 2. Распределения коэффициентов турбулентного обмена

Характерные вертикальные распределения концентрации  $S$ , скорости  $U$  и температуры  $T$  в сформировавшемся придонном плотностном течении, а также профили коэффициентов турбулентного переноса для тепла  $K_h$ , импульса  $K_T$  и взвеси  $K_s$  представлены на рис. 1.

Распределение коэффициента обмена ( $K_s$  или  $K_T$ ) рассчитывалось из полуэмпирического уравнения турбулентной диффузии, которое записывается в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} - \omega_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \quad (1)$$

где  $\varphi = S, T$ ;  $d\varphi/dt = \partial\varphi/\partial t + u\partial\varphi/\partial x + w\partial\varphi/\partial z$  (в рамках плоской задачи),  $\omega_\varphi = \omega_f$  при  $\varphi = S$  и  $\omega_\varphi = 0$  при  $\varphi = T$ ,  $K_\varphi = K_s, K_h$ ,  $t$  — время,  $x$  — расстояние вдоль по потоку,  $z$  — высота над уровнем дна,  $\omega_f = \left( \sum_{i=1}^{\Phi} \omega_{fi} S_i \right) / S$  — средневзвешенная гидравлическая крупность для смеси взвешенных частиц

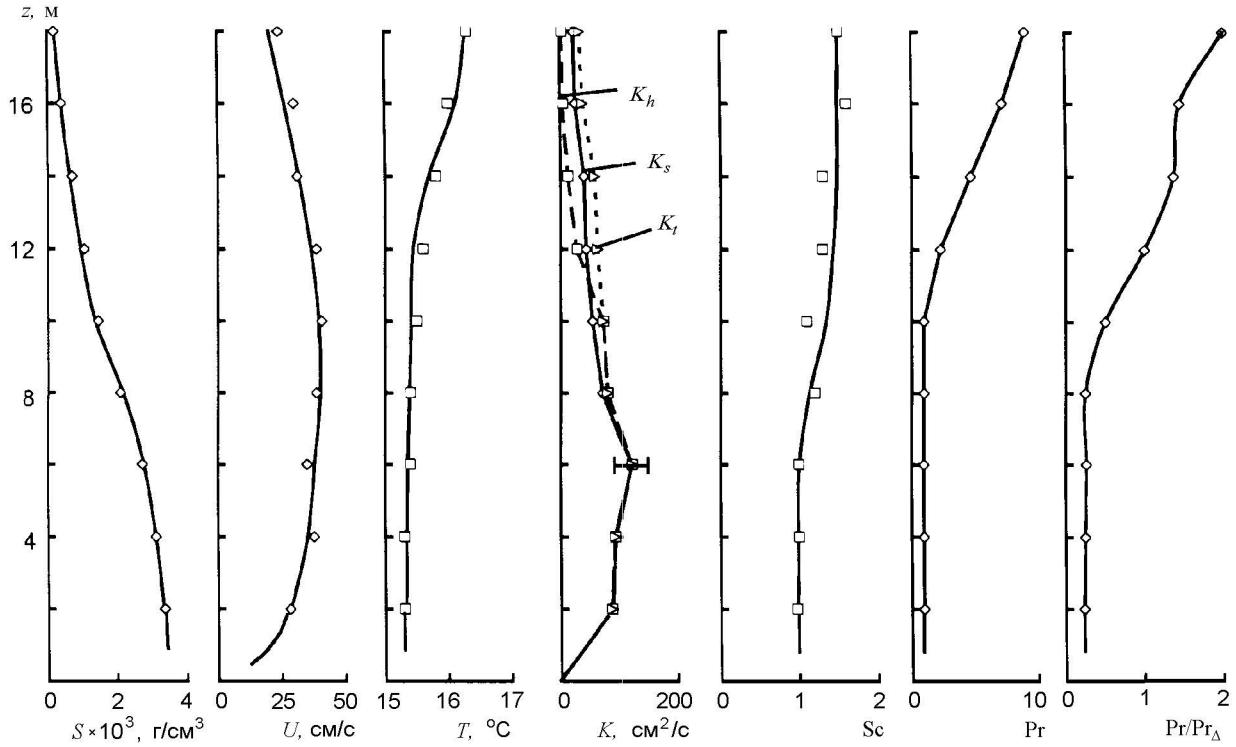


Рис. 1. Вертикальные распределения концентрации  $S$ , скорости  $U$ , температуры  $T$ , коэффициентов переноса импульса  $K_T$ , взвеси  $K_s$  и теплопроводности  $K_h$ , числа Шмидта  $Sc$ , числа Прандтля  $Pr$  и отношения  $Pr/Pr_{\Delta}$ , где  $Pr_{\Delta}$  — среднее по слою смешения. Точки на графиках  $S$ ,  $U$  и  $T$  соответствуют результатам измерений, а на остальных — параметрам, рассчитанным по экспериментальным результатам. Кривые  $S(z)$ ,  $U(z)$  и  $T(z)$  — теоретические, остальные — аппроксимации по данным измерений

разных фракций\*),  $S = \sum_{i=1}^k S_i$ . Для данных прямых измерений в изучаемом потоке справедливы неравенства

$$w \ll w_f, \quad U \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} \ll \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2)$$

При определении  $K_s$  по (1) с учетом (2) использовались граничные условия

$$S|_{z=z_u} = S_u, \quad \frac{\partial S}{\partial z}|_{z=z_u} = 0. \quad (3)$$

Второе условие в (3) соответствует обычному для сплошной среды плавному сопряжению пространственных распределений ее характеристик при  $S|_{z \gg z_u} \approx S_u$ .

После интегрирования (1) при условиях (2) получаем

$$K_h = (\partial_z T)^{-1} \left( \int_{z_k}^z \partial_t T dz + C_H \right), \quad (4)$$

где  $C_H = \text{const}$ ,  $z_k$  — ближайший к дну (по данным измерений) уровень регистрации  $T$ . В нашем случае  $z_k \approx 0,05z_u$ . Определение константы  $C_H$  требует задания значений параметров уравнения (4) на одной из границ потока. Однако возможен упрощенный подход к решению этой задачи при известном сред-

нем по вертикали значении  $\overline{K_h} = \overline{z_u}^{-1} \int_0^{z_u} K_h dz$ . Величина  $\overline{K_h}$  оценивается по найденному в работе [2] решению уравнения (1) при условии  $K_h = \text{const}$  и по данным измерений

$$T = T_0 + T_A \text{erf}(-\beta z) \sin(\omega t - \beta z - \gamma). \quad (5)$$

Согласно [2]  $K_h = K_h^{(1)}$ , где

$$K_h^{(1)} = \frac{\omega}{2\beta^2}. \quad (6)$$

В (5)  $\omega$  — частота флуктуаций температуры. В наших расчетах учитывались частоты флуктуаций температуры  $T(t)$  (рис. 2), много меньшие  $t_c^{-1}$ , где  $t_c$  — время съемки профиля  $T(z)$  ( $t_c \approx 10$  мин),  $\gamma$  — начальная фаза. Параметры  $T_0$ ,  $T_A$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$  находятся с помощью аппроксимации измеренных распределений  $T(z, t)$  функцией (5), после чего определяется  $K_h^{(1)}$  по (6).

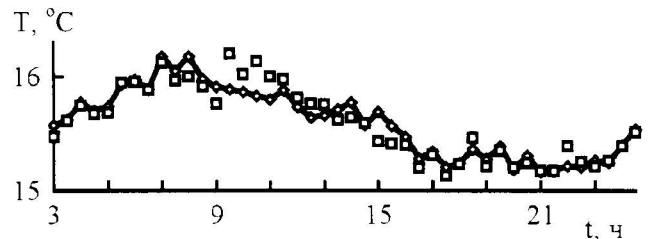


Рис. 2. Суточный цикл средней по вертикали температуры  $T$ . Точки соответствуют результатам измерений, кривая найдена по предлагаемой модели

\*) Размеры частиц не превышали 70 мкм. Число фракций  $\Phi$  при анализе состава взвеси составляло 16 [1].

В предположении о равенстве

$$\overline{K_h} = K_h^{(1)} \quad (7)$$

рассчитываются  $C_H$  и  $K_h(z)$  из (4) при известном распределении  $T(z, t)$ .

Справедливость гипотезы (7) проверена путем сравнения измеренных профилей  $T(z, t)$  и рассчитанных по (1) с применением найденного распределения  $K_h(z)$ . При решении уравнения (1) используются нестационарные граничные условия на придонном горизонте  $z_k$ :

$$T(z_k) = T_k(t), \quad \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{z=z_k} = \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_k, \quad \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=z_k} = \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_k. \quad (8)$$

Отклонения приведенных на рис. 1, 2 теоретических распределений температуры от измеренных обусловлены преимущественно неучтенными в модели эффектами нестационарности с периодами порядка времени съемки профилей  $T(z)$ .

После определения  $K_h(z)$  и  $K_s(z)$  из (1) были найдены профили турбулентной вязкости  $K_T(z)$  (см. рис. 1). Распределение  $K_T = K_s \cdot Sc$ , где  $Sc$  — число Шмидта, рассчитано с применением значений  $Sc(z)$ , оцененных по методике, приведенной в работе [1]. Коэффициенты обмена  $K_h, K_T, K_s$  максимальны ( $\sim 150 \text{ см}^2/\text{с}$ ) при  $z \approx 4 \text{ м}$ . Этот уровень относится к области ядра потока, в которой значения скорости течения  $U$  близки к максимальным (рис. 1). Основные расхождения профилей  $K_h, K_T, K_s$  наблюдаются в слое смешения течения с вышележащими водами (при  $z > 7 \text{ м}$ ). Эти различия характеризуются распределениями чисел Шмидта  $Sc(z)$  и Прандтля  $Pr(z) = K_T/K_h$ , которые анализируются в следующем разделе.

### 3. Влияние устойчивости стратификации и концентрации взвеси на турбулентный теплоперенос

На рис. 1 приведены типичные профили чисел Прандтля и Шмидта, а также профиль усредненного по времени соотношения  $Pr/Pr_\Delta$ , где  $Pr_\Delta$  — среднее значение по слою смешения. В придонной области

эти распределения квазиоднородны и значения  $Sc$  и  $Pr$  близки к единице, а в слое смешения  $Sc$  и  $Pr$  увеличиваются с высотой. В слое смешения ( $z \geq 7 \text{ м}$ ) число  $Sc$  равно  $1 \div 1,5$ , а  $Pr = 1 \div 10$ .

Для учета влияния устойчивости стратификации на число Прандтля в слоях смешения обычно используются полуэмпирические зависимости  $Pr(Ri_\Delta)$ . Здесь  $Ri_\Delta = (g/\rho)\Delta\rho_m\Delta z_m/(\Delta U_m^2)$  — интегральное число Ричардсона,  $\Delta z_m = z_u - z_m$  — толщина слоя смешения,  $z_u$  — толщина течения,  $z_m$  — уровень максимума на профиле скорости,  $\Delta U_m = U_m - U_F$ ,  $U_m = U(z_m)$ ,  $U_F = U(z_u)$ ,  $g$  — ускорение свободного падения.

Информация о виде зависимости  $Pr(Ri)$  применительно к придонным плотностным взвесенесущим потокам практически отсутствует в литературе. При качественном анализе функции  $Pr(Ri)$  представляют интерес результаты ее изучения для других типов стратифицированных течений. Некоторые из этих данных приведены в таблице.

Общие закономерности одновременных изменений чисел  $Pr$  и  $Ri$  по представленным в таблице результатам состоят в следующем.

1. Число  $Pr$  возрастает с увеличением устойчивости стратификации, причем вид функции  $Pr(Ri)$  зависит от области значений  $Ri$ .

2. При сочетании турбулентного обмена с волновым увеличивается значение  $\Delta Pr/\Delta Ri$ . В случаях усиления влияния внутренних волн на массообмен (режим ВВ+ТП по [6] в таблице) наблюдались более высокие значения  $Ri$ , чем в режиме ТП.

Анализ вида зависимостей  $Pr(Ri)$  выполнялся также в работах [8–10]. В [9] выражения для  $Pr$  и  $Sc$  представляются в виде сходных функций, нелинейно возрастающих с увеличением числа  $Ri$ . Из результатов работы [10] следует выражение  $Pr = C(1+A_1 Ri)^{\gamma+1}/(1+A_2 Ri)^\gamma$ , где  $A_1, A_2 = 1 \div 10^2$ ,  $\gamma = 0,5 \div 4$ ,  $C = \text{const}$ . В [8] число Прандтля определяется формулой  $Pr = 1 + A_3 Ri$ . При  $A_1 = A_2$  функции  $Pr(Ri)$  из [5, 8, 10] аналогичны.

Исходя из этих результатов, можно в первом приближении представить полуэмпирическую зависимость  $Pr(Ri)$  в виде

$$Pr = 1 + A_p Ri. \quad (9)$$

Источник	Объект исследований	Механизм обмена	Pr	Ri	Pr(Ri)
[3]	Подледное течение в о. Байкал	ТП	$10 \div 10^2$	$0,6 \div 2,5$	$Pr \sim Ri$
[4]	Циркуляция в водохранилище-охладителе	ТП	60	2	$Pr = \frac{0,8(1+37Ri^2)}{1+0,74Ri}$
[5]	Дрейфовое термохалинное течение (лабор. модель)	ТП	$64 \div 160$	$0,3 \div 3,4$	$Pr = 54,6(1+0,6Ri)$
[6]	Термохалинные течения в океане	ТП	1	$Ri < 0,1$	$Pr \sim Ri^{0,5}$
		ВВ+ТП	102	$Ri > 0,1$	$Pr \sim Ri$
[7]	Термохалинные течения в океане	ТП	3	0,3	—
		ВВ+ТП	11	1,3	—

ТП — турбулентный перенос, ВВ — внутренние волны.

Для слоя смешения в (9) используется  $Ri = Ri_{\Delta}$ . Во взвесенесущем потоке, помимо числа  $Ri$ , влияющего на величину  $K_u/K_T$ , необходимо учесть воздействие взвеси на теплообмен. С этой целью было выполнено исследование зависимости коэффициента  $A_{\rho}$  из (9) от параметра Тернера  $R\rho_s = \Delta\rho(S)/(\Delta\rho(T))$ , который характеризует соотношение вкладов суспензионной и термической стратификации в плотностное расслоение вод. По нашим данным (рис. 3), в потоке со смешанной стратификацией  $A_{\rho} = A_{\rho}(R\rho_s, Ri)$ :

$$A_{\rho} = A_S(R\rho_s) + A_R(Ri_{\Delta}). \quad (10)$$

При этом  $A_S = 2(1 - 0,06R\rho_s)$  и  $A_R = -1,3/Ri_{\Delta}$  при  $R\rho_s = 4 \div 12$ ,  $Ri = 0,5 \div 5$ . При  $Ri = 5 \div 7$  слагаемые в (10)  $A_S = 0$ ,  $A_R = 4(1 - 4,5Ri_{\Delta}^{-1})$ . Графики зависимостей  $Pr(A_{\rho}Ri_{\Delta})$ ,  $A_{\rho}(R\rho_s)$  показаны на рис. 3. Согласно рис. 3, а значения  $Pr$ , найденные по профилям  $K_T$ ,  $K_h$ , соответствуют рассчитанным по (9), (10). В отличие от функции  $Pr(Ri)$  из работ [4, 5] коэффициент  $A_{\rho}$  зависит от параметра Тернера (рис. 3, б).

Две группы точек на рис. 3, а соответствуют двум различным режимам массообмена в потоке. Анализ эволюции поля температуры за время измерений показал, что максимальное значение  $Pr = 3 \div 10$  (см. кривую 2) зарегистрировано в моменты прохождения фронтов внутренних волн через вертикаль зондирования. В эти моменты вертикальная компонента скорости внутренних волн максимальна. Этим и обусловлено увеличение  $K_T$  при малых изменениях  $K_h$ . По физической интерпретации такого эффекта, приведенной в работе [6], волновой обмен импульсом происходит интенсивнее, чем теплоперенос. Это объясняется тем, что импульс может переноситься без перемешивания пульсациями давления, которые тепло не переносят. Прямая 1 относится к моментам прохождения через вертикаль наблюдений гребней и подошв внутренних волн, где вертикальная компонента волновой скорости близка к нулю. В эти моменты в потоке доминирует турбулентный обмен. Именно в таком режиме существует зависимость  $Pr$  от  $R\rho_s$ .

Согласно выявленной зависимости  $Pr(R\rho_s, Ri)$ , рост числа  $Pr$  по мере возрастания устойчивости течения ( $Ri$ ) замедляется с повышением  $R\rho_s$  за счет усиления воздействия суспензионной стратификации на

плотностное расслоение вод. Этот процесс иллюстрируется графиком зависимости  $A_{\rho}$  от  $R\rho_s$  (рис. 3, б). Для изучаемого суспензионного потока с  $R\rho_s = 4 \div 12$  при  $i_s = 3 \cdot 10^{-3}$  и  $Ri_{\Delta} = 0,5 \div 5$  отмеченный эффект связан с двойственным характером воздействия взвеси на течение: с одной стороны, рост  $\Delta\rho(S)$  ведет к повышению устойчивости потока и гашению турбулентного обмена, с другой — к ускорению течения над наклонным дном и росту интенсивности турбулентности. Последний фактор учитывается зависимостью  $A(R\rho_s)$  в (9), (10). Поэтому при сохранении значения  $Ri$  повышение  $R\rho_s$  за счет  $\Delta\rho(S)$  приводит к спаду  $Pr$ , что характеризует усиление теплообмена в потоке, ускоряющемся над наклонным дном.

Результаты, полученные в статье, позволяют при помощи нового подхода к описанию характеристик турбулентного обмена в плотностных потоках рассчитывать распределение температуры  $T(z, t)$  с учетом влияния взвеси и внутренних волн на теплоперенос. Перечислим основные из этих результатов:

1. Разработана оригинальная методика расчета вертикального распределения коэффициента турбулентного переноса тепла и профилей температуры воды во взвесенесущем придонном плотностном потоке. Профили температуры и коэффициента обмена находятся без задания тепловых потоков на границах течения.

2. Получены вертикальные распределения турбулентных чисел Шмидта и Прандтля в слоях смешения и в придонном пограничном. Эти профили характеризуются спадом значений  $Sc$  и  $Pr$  с приближением ко дну.

3. Установлено, что воздействие взвеси на теплоперенос при  $Ri = 0,5 \div 5$ ,  $Pr = 1 \div 4$  определяется не только гашением турбулентности, но и одновременно ростом интенсивности обмена в суспензионном потоке, ускоряющемся над наклонным дном. При  $Pr = 3 \div 10$ ,  $Ri = 5 \div 7$ , в периоды усиления влияния внутренних волн на вертикальный обмен этим эффектом можно пренебречь.

4. Получено отражающее эти эффекты полуэмпирическое выражение для числа Прандтля. Это выражение позволяет учесть зависимость интенсивности турбулентного теплообмена от устойчивости течения и соотношения вкладов суспензионной и термической стратификации в плотностное расслоение вод.

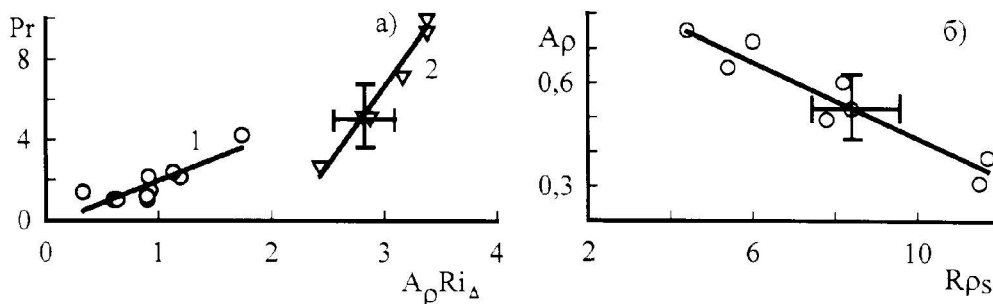


Рис. 3. Графики зависимостей числа Прандтля  $Pr$  от произведения  $A_{\rho}Ri_{\Delta}$  (а) и коэффициента  $A_{\rho}$  от параметра Тернера  $R\rho_s$  (б). Прямые соответствуют функциям (9), (10)

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 99-05-64045, 99-01-01041).

#### Литература

1. Самолобов Б.И., Силаева Л.В. // Изв. РАН, ФАО. 1998. № 2. С. 274.
2. Шулейкин В.В. Физика моря М.: Наука, 1968. Гл. 4, § 10. С. 460.
3. Анисимова Е.П., Поборчая Л.В., Сперанская А.А. // Изв. АН СССР, ФАО. 1978. 14, № 10. С. 1110.
4. Дрижус М.Р., Марцинкус К.К. // Всес. конф. «Проблемы стратифицированных течений», Юрмала-88. ИФ АН Латв. ССР. 1988. Тез. докл. Т. 2. С. 13.
5. Еремина Е.Р., Карлин Л.Н. // Интрузионные течения: Теория и эксперимент. Сб. научных трудов. Калининград, 1997. С. 30.
6. Лозовацкий И.Д., Озмидов Р.В. // Океанология. 1979. 19, № 6. С. 982.
7. Padman L. // J. Geophys. Res. 1994. C99, No. 11. P. 22, 491.
8. Bowden K.F. // Ocean Management. 1981. 6, No. 2/3. P. 117.
9. Jungclaus J.H., Backhaus J.O. // J. Geophys. Res. 1994. C99, No. 6. P. 12, 385.
10. Stacey M.W., Bowen A.J. // J. Geophys. Res. 1988. C93, No. 4. P. 3528.

Поступила в редакцию  
02.10.98

УДК 537.871.64

## МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ ПЕРЕМЕЩАЮЩИХСЯ ИОНОСФЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

В. Д. Гусев, А. Г. Вологдин, Н. В. Карабанов, Д. В. Кирьянов

(кафедра физики атмосферы)

**Теоретически обосновывается метод определения фазовой и групповой скорости перемещающихся ионосферных возмущений. Метод основан на спектральном анализе угломерно-доплеровских данных дистанционного радиозондирования ионосферы. Метод иллюстрируется на примере обработки экспериментальных данных.**

Крупномасштабные неоднородности слоя  $F2$  ионосферы связывают с перемещающимися ионосферными возмущениями (ПИВ), которые имеют волновую природу и вызваны, согласно современным представлениям [1], распространяющимися в верхних слоях атмосферы акустико-гравитационными волнами. Характерные периоды таких неоднородностей составляют от единиц до десятков и сотен минут. Несмотря на накопленный за последние полвека обширный материал по ПИВ, на сегодняшний день открытыми остаются такие вопросы, как их дисперсионные свойства, соотношение фазовых и групповых скоростей, механизмы генерации и т.п. При этом если крупномасштабные движения ионосферы изучены довольно полно, то средне- и маломасштабные возмущения — совершенно недостаточно.

Наиболее широко применяемым методом экспериментального изучения ПИВ является наземное радиозондирование в коротковолновом диапазоне. Параметры зондирующего сигнала регистрируются, как правило, в нескольких пунктах наблюдения на поверхности Земли, т.е. пространственно-разнесенным приемом. Впервые задача определения фазовой скорости ПИВ по флуктуациям параметров рассеянного поля (например, амплитуды или доплеровского смещения частоты) была решена в работе [2] и предусматривала вычисление соответствующих кросс-спектров и анализ их мнимых составляющих. В дальнейшем данная методика была обобщена на случай пространственной анизотропии рассеяния радиоволн на ПИВ [3], а практическая реализация проводилась во многих работах (см., напр., [4]).

К ограничениям данного способа определения фазовой скорости относится необходимость организации большого числа пунктов наблюдения, в особенности при изучении разномасштабных ПИВ. В работе [5] предложен дифференциально-фазовый метод измерения, касающийся диагностики пространственной структуры ионосферных возмущений. Этим методом с помощью одной угломерно-доплеровской установки возможно исследование неоднородностей разного масштаба. В настоящей статье развиваются спектральные методы анализа ионосферного сигнала для определения групповых и фазовых скоростей ПИВ применительно к дифференциально-фазовой схеме измерения.

Определение скорости ионосферных возмущений по дифференциально-фазовым характеристикам радиосигнала, а именно углам прихода и доплеровскому смещению, составляет обратную задачу динамики ионосферных возмущений. Рассмотрим сначала прямую задачу рассеяния радиоволн в среде, характеризуемой показателем преломления  $n(x, y, z, t)$ , который моделирует распространяющееся в ионосфере ПИВ. Требуется определить доплеровское смещение и углы прихода зондирующего радиосигнала на выходе из ионосферы.

Рассеяние волн в средах с плавно меняющимися свойствами описывается с помощью методов геометрической оптики. Фаза волны в среде выражается в виде интеграла по невозмущенной траектории:

$$\Phi = k \int n(x, y, z, t) d\sigma.$$