

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 532.517.4

АНАЛИЗ ПРОФИЛЯ СКОРОСТИ ВЯЗКОЙ СРЕДЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ
ВДОЛЬ ШЕРОХОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. В. Комаров, И. О. Стурейко

(НИИЯФ)

Предложен квантовомеханический подход к решению гидро- и газодинамических задач о турбулентных течениях вязких сред. Проведен анализ возмущения профиля скорости турбулентного течения в канале, вызванного прерывистым пристеночным слоем. Рассчитаны колебания стенок канала, сопровождающие турбулентное течение.

Проблеме турбулентности потока посвящено большое количество работ, как теоретических, начиная с известных работ А. И. Колмогорова, так и экспериментальных (см. литературу в работе [1]). В последнее время, например, получил развитие масштабно-инвариантный подход [2, 3] и диаграммный метод эмпирического решения уравнения Навье–Стокса [4]. Тем не менее до сих пор практические задачи, связанные с турбулентностью, решаются на основе различных, иногда противоречивых, феноменологических подходов, не имеющих единой теоретической основы.

В настоящей работе предпринята попытка проанализировать одну из конкретных задач возмущения профиля скорости турбулентного потока на основе квантовомеханического подхода, допускающего решение в аналитическом виде.

Рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости или газа со скоростью \mathbf{v} в плоскопараллельном канале шириной $2R$ с шероховатыми стенками. Шероховатость поверхности канала определяет примыкающую к ней турбулентную область течения толщиной $\pm(R-x_0)$, в которой $\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$ (начало координат помещено в центр канала). В остальной области канала течение потенциальное ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$). Указанные области разделены некоторой воображаемой границей $x = x_0(z, t)$, где z — координата вдоль оси Oz , совпадающей с направлением движения среды, и t — время.

Предположим, что граница, испытывающая деформации со стороны турбулентного слоя, задана уравнением $x = x_0 + \delta(z, t)$, где ось Ox ортогональна к направлению движения. Предположим также, что $|\delta(z, t)| \ll x_0$. Следуя традиционному подходу, представим скорость, давление и плотность жидкости или газа в канале в виде суммы двух компонент: $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{e}_z + \mathbf{v}'$, $p = p_0 + p'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$, где \mathbf{v}_0 , p_0 , ρ_0 — усредненные компоненты и \mathbf{v}' , p' , ρ' — пульсационные добавки. В области потенциального течения будем считать малыми возмущения скорости: $|\mathbf{v}'| \ll |v|$ и возмущения плотности: $\rho' \ll \rho_0$. Наша задача состоит в нахождении функции возмущения

скорости \mathbf{v}' в зависимости от вида (формы) границы турбулентного слоя.

Как известно, движение жидкости в потенциальной области при постоянном давлении описывается нестационарными уравнениями Прандтля

$$\text{div } \mathbf{v}'_t = \frac{\partial v'_z}{\partial z} + \frac{\partial v'_x}{\partial x} = 0,$$

$$\rho \left(\frac{\partial v'_z}{\partial t} + v_a \nabla_a v'_z \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 v'_x}{\partial z^2}$$

(μ — коэффициент трения), которые с учетом возмущения принимают вид

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + v \frac{\partial \rho'}{\partial z} + \rho_0 \text{div } \mathbf{v}' = 0,$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'_z}{\partial t} = -a_0^2 \nabla p'$$
(1)

с граничным условием $a_0^2 \rho'(\pm|R-x_0|, z, t) = \overline{p'_\pm}(z, t)$, где $a_0 = \nabla(p_0/p') + 1$, $-(R-x_0) < x < (R-x_0)$.

Рассматриваемую задачу анализа возмущения профиля скорости будем решать с помощью квантовомеханического подхода. Для этого определим пульсационную компоненту скорости \mathbf{v}' в виде $\mathbf{v}' = \nabla \varphi$, где φ — функция потенциала скорости, удовлетворяющая граничным условиям

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=\pm(R-x_0)} = \frac{\partial \delta}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta}{\partial z} = \Delta_0(z, t).$$
(2)

Тогда на основании (1) уравнение для φ может быть представлено в виде

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\mathbf{v}}{a_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$
(3)

с граничными условиями (2).

Выделим в функции φ часть, зависящую от формы границы турбулентного слоя. Для этого представим функцию φ следующим образом: $\varphi = \Delta_0 x + \Phi$ и под-

ставим ее в уравнение (3). Для функции Φ получаем теперь уравнение

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\mathbf{v}}{a_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = x f_0(z, t) \quad (4)$$

с граничным условием $(\partial \Phi / \partial x)_{x=\pm(R-x_0)} = 0$, где

$$f_0 = \frac{\partial^2 \Delta_0}{\partial z^2} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \Delta_0}{\partial t^2} - \frac{v}{a_0^2} \frac{\partial^2 \Delta_0}{\partial t \partial z}. \quad (5)$$

Для решения уравнения (4) при $f_0 \neq 0$ необходимо найти его решение при $f_0 = 0$. Эта задача имеет также и самостоятельное значение, так как соответствует заданию определенной деформации границы турбулентного слоя $\delta(z, t)$, например в виде линейной функции от z и t : $\delta(z, t) = kzt$.

Решение уравнения (4) для $f_0 = 0$ ищем в виде $\Phi_0 = e^{i\omega t} e^{ikz} g(x)$. Подстановка Φ_0 в (4) приводит к уравнению для функции $g(x)$: $(d^2 g / dx^2) + \lambda^2 g = 0$, $\lambda = \omega^2 / a_0^2 - (v / a_0^2) \omega k - k^2$, с граничным условием $(dg / dx)_{x=\pm(R-x_0)} = 0$. Здесь k — некоторый параметр задачи (действительное число). Решая эту задачу на собственные значения, получаем

$$g(x) = \left\{ g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{R-x_0}} \cos \left(\frac{\pi n}{2(R-x_0)} x - \frac{\pi n}{2} \right) \right\},$$

при этом $\lambda = \{\lambda_n\}$, $n \in 1, \dots, \infty$.

Отсюда следует, что функция потенциала возмущения профиля скорости Φ_0 также может принимать различные значения из множества $\{\Phi_n = e^{i\omega(\lambda_n)t} e^{ikz} g_n(x)\}$ и $\omega(\lambda_n)$ может принимать дискретные значения. При фиксированных параметрах a_0 и k изменения Φ_0 происходят при дискретных изменениях скорости потока \mathbf{v} .

Решение задачи в общем случае при $f_0 \neq 0$ ищем в виде

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_n \varphi_{nk} dk, \quad (6)$$

где функции $\varphi_{nk} = (1/\sqrt{2\pi}) e^{ikz} g_n(x)$ нормированы условием $\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-(R-x_0)}^{(R-x_0)} dx \varphi_{nk}^* \varphi_{mk'} = \delta(k-k') \delta_{nm}$ (звездочкой обозначено комплексное сопряжение). Таким образом, в выбранном подходе нахождения потенциала возмущения профиля скорости потока сводится к определению функций C_n . Подставим C_n в виде $C_n = \exp\{-(i/2)vk t\} \alpha_n$, где $\alpha_n^*(k, t) = \alpha_n(-k, t)$. Для определения $\alpha_n(k, t)$ из уравнения (3) получаем

$$\frac{d^2 \alpha_n}{dt^2} + \left[(a_0 k)^2 + (a_0 \lambda_n)^2 + \left(\frac{vk}{2} \right)^2 \right] \alpha_n = \exp\{(i/2)vk t\} f_{nk} = \tilde{f}_{nk}(t). \quad (7)$$

Вводя вещественные функции q_{nk} и p_{nk} , однозначно выражающиеся через α_{nk}^* и α_{nk} при фиксирован-

ном k , и проводя несложные преобразования, представляем уравнение (7) в виде

$$\frac{dq_{nk}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{nk}},$$

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk \left[\frac{p_{nk}^2}{2m} + m \frac{\Omega_n^2}{2} q_{nk}^2 - \gamma m \operatorname{Re} \tilde{f}_{nk} \right],$$

где H — функция Гамильтона системы осцилляторов во внешнем поле.

Как и любую динамическую систему, ее можно проквантовать, полагая p_{nk} и q_{nk} операторами, удовлетворяющими соотношениям $[\hat{q}_{nk}, \hat{q}_{n'k'}] = 0$, $[\hat{p}_{nk}, \hat{p}_{n'k'}] = 0$, $[\hat{q}_{nk}, \hat{p}_{n'k'}] = i\hbar \hat{I} \delta_{nn'} \delta(k-k')$, где \hbar — постоянная Планка. В результате для определения потенциала скорости можно применить уравнение Шрёдингера $i\hbar(\partial|\phi\rangle/\partial t) = \hat{H}|\phi\rangle$. В этом случае операторами становятся и потенциал скорости, и само поле скоростей, представимые с помощью операторов \hat{q}_{nk} , $\hat{\alpha}_{nk}$ в виде

$$\begin{aligned} \hat{\Phi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} dk \exp\left\{-i\frac{vk}{2}t\right\} \hat{\alpha}_{nk} \frac{\exp\{ikz\}}{\sqrt{2\pi}} g_{nk}(x) + \int_0^{\infty} dk \exp\left\{-i\frac{vk}{2}t\right\} \hat{\alpha}_{nk} \frac{\exp\{ikz\}}{\sqrt{2\pi}} g_{nk}(x) \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk \cdot 2 \cos k \left(z - \frac{vt}{2} \right) \hat{q}_{nk} g_n(x), \end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \nabla \hat{\Phi},$$

$$\begin{aligned} \hat{v}_z &= \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial z} = - \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk \cdot 2 \sin k \left(z - \frac{vt}{2} \right) \hat{q}_{nk} g_n(x), \\ \hat{v}_x &= \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk \cdot 2 \cos k \left(z - \frac{vt}{2} \right) \hat{q}_{nk} \frac{dg_n(x)}{dx}. \end{aligned}$$

Заметим, что компоненты поля коммутируют: $[\hat{v}_x, \hat{v}_z] = 0$. Собственные функции оператора \hat{H} , определенные из уравнения $\hat{H}|\phi_n\rangle = E|\phi_n\rangle$, не являются собственными для оператора $\hat{\mathbf{v}}$, поэтому можно говорить лишь о среднем значении скорости: $\langle \phi_n | \hat{v}_x | \phi_n \rangle$ и о ее флуктуациях: $\langle \phi_n | \hat{v}_x^2 | \phi_n \rangle$.

Полученные результаты позволяют анализировать рассматриваемую задачу в конкретных случаях, в том числе и с выходом за рамки предположений о несжимаемости и бесструктурности жидкости.

Нами был проведен расчет потенциала пульсационной компоненты скорости в предположении, что $f_0 = 0$ и что граница пристеночного слоя выбрана в виде $\delta(z, t) = kzt$, $1 \leq z \leq L$, $1 \leq t \leq T$, где k — коэффициент пропорциональности, L и T — пространственный и временной периоды соответственно. Результаты расчета для функции $\Delta_0(z, t)$ пред-

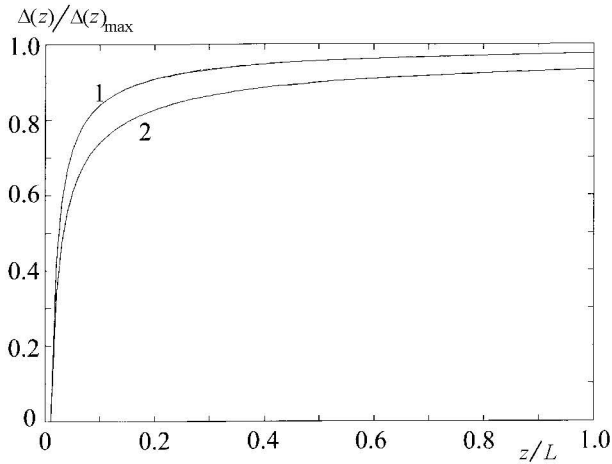


Рис. 1. Зависимость возмущения потенциала поперечной составляющей скорости от координаты z при фиксированном t , рассчитанная в предположении линейных граничных условий (кривая 1) и определенная экспериментально [5] (кривая 2)

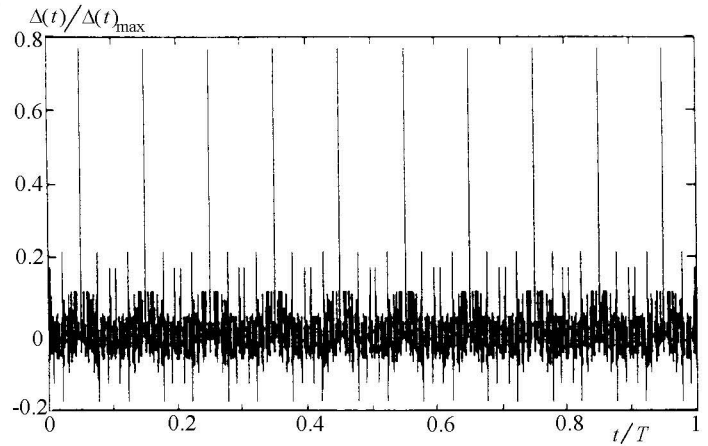


Рис. 2. Рассчитанная зависимость возмущения потенциала поперечной составляющей скорости от времени при фиксированном z

ставлены на рис. 1 (при фиксированном t) и рис. 2 (при фиксированном z). На рис. 1 для сравнения приведен профиль, определенный экспериментально в работе [5]. Расчетные и экспериментальные данные неплохо согласуются друг с другом. Из рис. 2 следует, что присутствие прерывистого пристеночного турбулентного слоя приводит к пульсациям поперечной компоненты скорости у стенки канала. Таким образом, по характеру колебаний стенки канала можно судить о виде турбулентного пристеночного слоя.

Авторы благодарны В. С. Потапову за обсуждение постановки задачи и методов решения и А. М. По-

повой и А. И. Васкину за обсуждение настоящей работы.

Литература

1. Frisch U. Turbulence. Cambridge University Press, 1996.
2. L'vov V.S. // Phys. Reports. 1991. **207**. P. 1.
3. Lumley J.L. // Phys. Fluids. 1992. **A4**. P. 203.
4. Kraichnan R.H. // J. Math. Phys. 1961. **2**. P. 124.
5. Van Dyke M. An Album of Fluid Motion, The Parabolic Press, Stanford (California). 1982.

Поступила в редакцию 11.11.98

УДК 539.171

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА МОДЕЛИРУЮЩЕГО ПОТЕНЦИАЛА К СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С ПОТЕНЦИАЛОМ $|x|^N$

В. Н. Сидоренко

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Рассматривается применение предложенного автором метода моделирующего потенциала для построения энергетического спектра уравнения Шрёдингера с потенциалом вида $|x|^N$. В качестве моделирующего потенциала выбирается потенциал гармонического осциллятора. Приводятся оценки для остаточных членов в нулевом и первом приближениях.

В работе [1] был предложен метод моделирующего потенциала (МП) и рассмотрено его применение к спектральной задаче для уравнения Шрёдингера в общем виде. В настоящей работе дано приложение метода к определению спектра оператора Шрёдингера с потенциалом $|x|^N$. Для этого запишем уравнение Шрёдингера с исходным моделируемым потенциалом:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''(x) + W(x, E)\Psi(x) = 0, \quad (1)$$

где потенциал $W(x, E) = E - U(x)$, $U(x) = |x|^N$, $N \in R$ и $\Psi(x) \in L_2(R^1)$. Для МП имеем уравнение [1]

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Phi''(y) + \widetilde{W}(y, \widetilde{E})\Phi(y) = 0, \quad (2)$$

где $\widetilde{W}(y, \widetilde{E}) = \widetilde{E} - y^2 + \frac{1}{2}(\hbar^2/2m)\{f(y), y\}$ — МП для исходного потенциала, а

$$\{f(y), y\} = \frac{f'''(y)}{f'(y)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(y)}{f'(y)} \right)^2 \quad (3)$$

— производная в смысле Шварца [1], причем $\widetilde{E} - y^2 = V(\widetilde{E}, y)$ — МП в нулевом приближении.

Уравнение (2) получается из (1) при следующей замене независимой и зависимой переменных (преобразование Лиувилля):