

Рис. 1. Зависимость возмущения потенциала поперечной составляющей скорости от координаты z при фиксированном t , рассчитанная в предположении линейных граничных условий (кривая 1) и определенная экспериментально [5] (кривая 2)

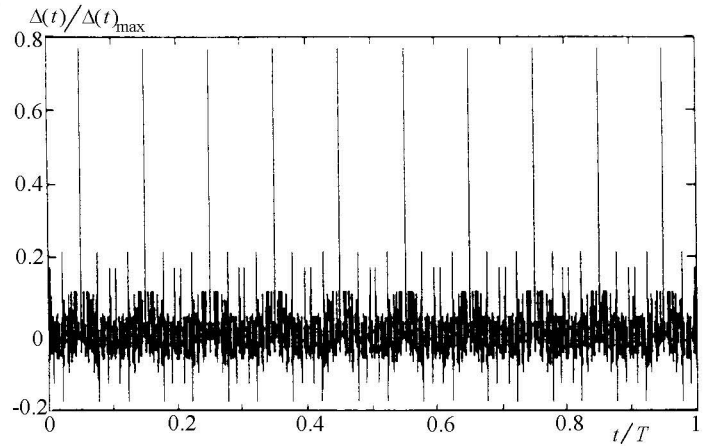


Рис. 2. Рассчитанная зависимость возмущения потенциала поперечной составляющей скорости от времени при фиксированном z

ставлены на рис. 1 (при фиксированном t) и рис. 2 (при фиксированном z). На рис. 1 для сравнения приведен профиль, определенный экспериментально в работе [5]. Расчетные и экспериментальные данные неплохо согласуются друг с другом. Из рис. 2 следует, что присутствие прерывистого пристеночного турбулентного слоя приводит к пульсациям поперечной компоненты скорости у стенки канала. Таким образом, по характеру колебаний стенки канала можно судить о виде турбулентного пристеночного слоя.

Авторы благодарны В. С. Потапову за обсуждение постановки задачи и методов решения и А. М. По-

повой и А. И. Васкину за обсуждение настоящей работы.

Литература

1. Frisch U. Turbulence. Cambridge University Press, 1996.
2. L'vov V.S. // Phys. Reports. 1991. 207. P. 1.
3. Lumley J.L. // Phys. Fluids. 1992. A4. P. 203.
4. Kraichnan R.H. // J. Math. Phys. 1961. 2. P. 124.
5. Van Dyke M. An Album of Fluid Motion, The Parabolic Press, Stanford (California). 1982.

Поступила в редакцию 11.11.98

УДК 539.171

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА МОДЕЛИРУЮЩЕГО ПОТЕНЦИАЛА К СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С ПОТЕНЦИАЛОМ $|x|^N$

В. Н. Сидоренко

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Рассматривается применение предложенного автором метода моделирующего потенциала для построения энергетического спектра уравнения Шрёдингера с потенциалом вида $|x|^N$. В качестве моделирующего потенциала выбирается потенциал гармонического осциллятора. Приводятся оценки для остаточных членов в нулевом и первом приближениях.

В работе [1] был предложен метод моделирующего потенциала (МП) и рассмотрено его применение к спектральной задаче для уравнения Шрёдингера в общем виде. В настоящей работе дано приложение метода к определению спектра оператора Шрёдингера с потенциалом $|x|^N$. Для этого запишем уравнение Шрёдингера с исходным моделируемым потенциалом:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''(x) + W(x, E)\Psi(x) = 0, \quad (1)$$

где потенциал $W(x, E) = E - U(x)$, $U(x) = |x|^N$, $N \in R$ и $\Psi(x) \in L_2(R^1)$. Для МП имеем уравнение [1]

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Phi''(y) + \widetilde{W}(y, \widetilde{E})\Phi(y) = 0, \quad (2)$$

где $\widetilde{W}(y, \widetilde{E}) = \widetilde{E} - y^2 + \frac{1}{2}(\hbar^2/2m)\{f(y), y\}$ — МП для исходного потенциала, а

$$\{f(y), y\} = \frac{f'''(y)}{f'(y)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(y)}{f'(y)} \right)^2 \quad (3)$$

— производная в смысле Шварца [1], причем $\widetilde{E} - y^2 = V(\widetilde{E}, y)$ — МП в нулевом приближении.

Уравнение (2) получается из (1) при следующей замене независимой и зависимой переменных (преобразование Лиувилля):

$$x = f(y), \quad \frac{d}{dx} = \frac{1}{f'(y)} \frac{d}{dy}, \quad (4)$$

$$\Psi(x)|_{x=f(y)} = \sqrt{f'(y)}\Phi(y).$$

Чтобы замена (4) была взаимно однозначной, необходимо потребовать знакоопределенности функции $f'(y)$. Далее полагаем, что $f'(y) > 0$.

В силу симметрии моделирующего и моделируемого потенциалов для действий $S_n(\tilde{E})$, $S_n(E)$ в нулевом приближении получим следующие выражения:

$$S_n(E) = 2 \int_0^{x_1} \sqrt{W(x, E)} dx = \frac{2}{N} E_n^{(2+N)/2N} B\left(\frac{1}{N}, \frac{3}{2}\right), \quad (5)$$

$$S_n(\tilde{E}) = 2 \int_0^{y_1} \sqrt{V(y, \tilde{E})} dy = \frac{1}{2} \pi \tilde{E}_n, \quad (6)$$

где $x_1 = E^{1/N}$ и $y_1 = \sqrt{\tilde{E}}$ — точки поворота, $B(1/N, 3/2)$ — B -функция, определяемая как $B(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha + \beta)$, а $\tilde{E}_n = 2n + 1$. В силу условия $S_n(E) = S_n(\tilde{E})$ [1] из (5), (6) для $E_n(\tilde{E})$ в нулевом приближении получим

$$E_n(\tilde{E}) = \left[\frac{\pi N}{4} B^{-1}\left(\frac{1}{N}, \frac{3}{2}\right) (2n + 1) \right]^{2N/(N+2)}. \quad (7)$$

При $N \rightarrow \infty$

$$E_n(\tilde{E}) = \left(\frac{\pi}{4} \tilde{E}_n\right)^2 = \left(\frac{\pi}{4} (2n + 1)\right)^2. \quad (8)$$

Теперь оценим величину поправок к спектру \tilde{E}_n в нулевом и первом приближениях. Подробно они изложены в работе [1]. Так, полагая, что \tilde{E}_n монотонно зависит от $\tilde{E}_n^{(0)}$ и представимо в нулевом приближении в виде

$$\tilde{E}_n = \tilde{E}_n^{(0)} + R_n^{(0)}, \quad (9)$$

где остаточный член $|R_n^{(0)}| < R_n$, получим следующую оценку сверху для $R_n^{(0)}$ (в системе единиц $\hbar = 2m = 1$):

$$|R_n^{(0)}| \leq \sqrt{\frac{M}{1 - MA(R_n^{(0)})}} \equiv B(R_n^{(0)}), \quad (10)$$

где $M(\tilde{E}) \equiv \frac{1}{4} \max_y \{f(y), y\}^2 \geq 0$ и $A(R_n^{(0)}) = \sum_{m \neq n} \left(|\tilde{E}_n^{(0)} - \tilde{E}_m^{(0)}| - |R_n^{(0)}| \right)^{-2}$.

Формула (10) справедлива при $MA(R_n^{(0)}) \leq 1$. В первом приближении, учитывая, что

$$\tilde{E}_n = \tilde{E}_n^{(0)} + \frac{1}{2} \{f(y), y\}_{nm} + R_n^{(1)}, \quad (11)$$

где $\{f(y), y\}_{nm}$ — матричный элемент шварциана (3), вычисленный по функциям $\Phi_n(y)$ нулевого приближения, получим следующую оценку сверху для остаточного члена $R_n^{(1)}$:

$$|R_n^{(1)}| \leq \sqrt{\frac{M^2 A(R_n^{(0)})}{1 - MA(R_n^{(0)})}} = \sqrt{MA(R_n^{(0)})} B(R_n^{(0)}). \quad (12)$$

Определим функцию $A(R_n^{(0)})$ и константу M . Поскольку $\tilde{E}_n^{(0)} = 2n + 1$, то функция $A(R_n^{(0)})$ представляема в виде

$$A(R_n^{(0)}) = \frac{1}{2} \Psi\left(1, 1 - \frac{R_n^{(0)}}{2}\right) - \frac{1}{4} \Psi\left(1, n + 1 - \frac{R_n^{(0)}}{2}\right), \quad (13)$$

где $\Psi(n, x) = \Psi^{(n)}(x)$ — Ψ -функция (логарифмическая производная n -го порядка от Γ -функции), а $\Psi(0, x) = \Psi(x)$ [2]. Функция (13) имеет полюсы при $R_n^{(0)} = 2k$, $k \in N$, причем при $R_n^{(0)} \rightarrow 0$ ведет себя следующим образом:

$$A(R_n^{(0)}) = \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4} \Psi(1, n+1)\right) + \left(\frac{1}{2} \zeta(3) + \frac{1}{8} \Psi(2, n+1)\right) R_n^{(0)} + O\left(\left(R_n^{(0)}\right)^2\right), \quad (14)$$

где $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана [2]. Считая, что $R_n^{(0)} < 1$, получаем ограничение на M следующего вида:

$$M < \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4} \Psi(1, n+1)\right)^{-1}. \quad (15)$$

Условие (15) выполняется при $n = 1, 2, 3, \dots$, поскольку

$$M \leq \frac{1}{4} \tilde{E}_n^{-2} < \frac{1}{4} \left(\tilde{E}_n^{(0)}\right)^{-2} = \frac{1}{4(2n+1)^2}. \quad (16)$$

Численные оценки сверху для $R_n^{(0)}$ и $R_n^{(1)}$ приведены в табл. 1.

В итоге для \tilde{E}_n в нулевом и первом порядках из (9) и (11) получим следующие выражения:

$$\tilde{E}_n = (2n + 1) + R_n^{(0)},$$

$$\tilde{E}_n \leq (2n + 1) + \frac{1}{2(2n + 1)} + R_n^{(1)}.$$

Таблица 1

Максимальная величина поправок в нулевом и первом приближениях

R_n	n				
	0	1	2	4	29
$R_n^{(0)}$	0,600	0,168	0,100	0,0556	0,0085
$R_n^{(1)}$	0,331	0,025	0,009	0,0026	0,00006

Т а б л и ц а 2
Энергетический спектр в нулевом приближении для потенциала $|x|^N$

$U(x)$	E_n	n			
		0	1	2	4
x^4	E_n^{theor}	$0,867 \pm 0,756$	$3,752 \pm 0,283$	$7,414 \pm 0,198$	$16,234 \pm 0,134$
x^4	E_n^{num}	1,060	3,800	7,456	16,262
x^6	E_n^{theor}	$0,705 \pm 0,820$	$4,161 \pm 0,354$	$8,954 \pm 0,270$	$21,622 \pm 0,201$
x^6	E_n^{num}	1,145	4,339	9,073	21,714

Подставляя (10) и (12) в (7), получим аналогичные оценки для спектра E_n . Сравнение энергетического спектра E_n , получаемого из (7) в нулевом приближении, с численными расчетами приведено в табл. 2.

Из таблицы видно, что метод МП в нулевом приближении при $n = 1, 2, 3, \dots$ с точностью до несколь-

ких процентов дает спектр E_n моделируемого потенциала. Это совпадает с результатами, полученными в рамках обычной квазиклассики. С увеличением n точность быстро возрастает. Так, при $n = 4$ погрешность уменьшается до 0,2%. А поскольку метод МП применим и к потенциалам, близким к сингулярным, то такой точности вполне достаточно для получения качественных оценок структуры спектра.

Литература

1. Свейшиков Н.А., Сидоренко В.Н. // Современные проблемы квантовой теории: Сб. статей: Препр. НИИЯФ МГУ № 98-23/524. М., 1998. С. 235.
2. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.

Поступила в редакцию
05.03.99

УДК 519.2:534

О ПРИМЕНЕНИИ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ В ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

С. А. Филатова

(кафедра компьютерных методов физики)

Рассматривается подход к проблемам отыскания оптимальных решающих стратегий в условиях неопределенности, базирующийся на аппарате теории многозначных отображений и нечетких множеств.

Нечеткое распределение $X \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ на пространстве \mathcal{X} полностью определяется своей характеристической функцией $\mu_X: \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{I}, \mathbf{I} = [0, 1]$. Распределение Y на \mathcal{Y} является образом распределения x , индуцированным отображением $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ [1–4], и обозначается как $Y = fX$, если

$$\begin{aligned} \mu_Y(y) &= \sup_{x:f(x)=y} \mu_X(x) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_X(x), \\ \mu_Y(y) &= 0, \text{ если } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{aligned}$$

Нечетким переходным распределением, действующим из пространства \mathcal{X} в пространство \mathcal{Y} , будем называть отображение $\alpha: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{Y})$, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in \mathcal{X}$ некоторое нечеткое распределение $\alpha x \in \mathcal{F}(\mathcal{Y})$ в пространстве \mathcal{Y} .

Если $\alpha: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{Y})$ и $A \in \mathcal{F}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$, то $\mu_A(x, y) = \mu_{\alpha x}(y) \forall x \in \mathcal{X} \forall y \in \mathcal{Y}$.

$Y \in \mathcal{Y}$ есть образ распределения X , индуцированный переходным распределением $\alpha: Y = \alpha X$, если

- а) для М-теории: $\mu_Y(y) = \sup_x \min(\mu_X(x), \mu_{\alpha x}(y))$,
- б) для Р-теории: $\mu_Y(y) = \sup_x \mu_X(x) \cdot \mu_{\alpha x}(y)$.

Условные распределения существуют для любого совместного распределения $A \in \mathcal{F}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$:

- а) в М-теории: $\mu_{\alpha x}(y) = \mu_A(x, y), \mu_{\beta y}(x) = \mu_A(x, y)$,

б) в Р-теории:

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha x}(y) &= \begin{cases} \frac{\mu_A(x, y)}{\mu_{p_x A}(x)}, & \text{если } \mu_{p_x A}(x) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \mu_{p_x A}(x) = 0, \end{cases} \\ \mu_{\beta y}(x) &= \begin{cases} \frac{\mu_A(x, y)}{\sup_z \mu_A(x, z)}, & \text{если } \mu_A(x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \mu_A(x, y) = 0, \end{cases} \\ \mu_{\beta y}(x) &= \begin{cases} \frac{\mu_A(x, y)}{\mu_{p_y A}(y)}, & \text{если } \mu_{p_y A}(y) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \mu_{p_y A}(y) = 0, \end{cases} \\ \mu_{\beta y}(x) &= \begin{cases} \frac{\mu_A(x, y)}{\sup_z \mu_A(z, y)}, & \text{если } \mu_A(x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \mu_A(x, y) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Пусть \mathcal{X} — некоторое фиксированное множество — пространство сигналов (объектов исследования), \mathcal{D} — фиксированное пространство решений (интерпретаций) и на множестве всех пар $\langle x, d \rangle$ $x \in \mathcal{X}, d \in \mathcal{D}$ определена функция потерь h , принимающая значения на $[0, \infty)$. Значение $h(x, d)$ определяет качество решения d для данного элемента x . Фактически речь идет об игре двух лиц $\langle \mathcal{D}, \mathcal{X}, h \rangle$, где \mathcal{D} — пространство решений I игрока, \mathcal{X} — пространство решений II игрока, h — функция потерь I игрока.