АКУСТИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

УДК 534.222

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН С ОСОБЕННОСТЯМИ ТИПА «РАЗРЫВ» И «РАЗРЫВ ПРОИЗВОДНОЙ»

А. А. Славнов, В. А. Хохлова

(*кафедра акустики*)

Развит асимптотический спектральный метод описания нелинейных акустических волн, содержащих особенности типа «разрыв» и «разрыв производной». Метод позволяет моделировать распространение разрывных возмущений при использовании небольшого количества гармоник (20–50). Получена замкнутая система связных нелинейных уравнений для конечного числа комплексных амплитуд гармоник, аппроксимирующая уравнение простых волн в спектральном представлении.

Введение

Изучение распространения сильно искаженных пилообразных возмущений и одиночных импульсов с ударным фронтом является важной задачей современной физики нелинейных волн. Актуальность этих исследований связана, в частности, с практическими проблемами медицинского терапевтического ультразвука и литотрипсии, звукового удара, гидроакустики.

В силу нелинейности задачи построить аналитическое решение используемых уравнений, как правило, не удается, и появляется необходимость в численном моделировании волнового процесса. Однако образование крутых участков в профиле волны (ударных фронтов) сильно усложняет численные расчеты. При временно́м подходе необходимо использовать разностные схемы с очень мелким шагом, достаточным для описания ударных фронтов [1], при спектральном — учитывать очень большое количество гармоник [2]. Задачи становятся еще более сложными, если в решении возможно образование особенностей типа математических разрывов, что приводит к возникновению осцилляций Гиббса и неустойчивости численного решения. Для моделирования таких нелинейных задач используются различные методы, в основном сводящиеся к введению искусственной вязкости, сглаживающей решение в области разрыва [1–3].

При временно́м подходе задачу можно упростить, если использовать теорию слабых ударных волн. Тогда движение ударных фронтов и эволюцию плавных участков профиля между ними можно описывать раздельно, сшивая решения на разрывах [4]. Предположение о наличии разрывов в решении можно также использовать в спектральном подходе, так как известно, что спектр разрывной функции имеет универсальную асимптотику на высоких частотах: амплитуды гармоник убывают пропорционально $1/n$. Такое поведение спектра разрывной функции было предложено использовать в задаче восстановления профиля волны с разрывом по известному ограниченному спектру [5–7]. Периодическая разрывная волна была представлена в виде суммы пилообразного профиля, амплитуда спектра которого медленно убывает на высоких частотах (обратно пропорционально номеру гармоники n), и непрерывного профиля с быстро убывающим спектром. Если высокочастотные компоненты спектра аппроксимировать спектром пилообразной волны, то можно восстановить исходный разрывный профиль волны по заданному небольшому (20–50) количеству гармоник. Явный вид высокочастотного спектра пилообразной волны был использован в модифицированном спектральном подходе для описания нелинейного распространения акустических волн [5]. Было показано, что развитый подход хорошо работает при моделировании достаточно симметричных в околоразрывной области волн, т. е. волн с небольшим скачком производной до и после разрыва. В случае распространения сигналов, содержащих также особенность типа «разрыв производной», в решении развивается неустойчивость, поскольку на высоких частотах не учитывается соответствующая ей асимптотика, пропорциональная $1/n^2$. Несимметричный вид профиля около разрыва наблюдается при моделировании мощных сфокусированных звуковых пучков [8], волн в диспергирующих средах [9] и особенно одиночных импульсов с ударным фронтом [5].

Цель настоящей работы состоит в обобщении модифицированного спектрального подхода для описания волн с такими особенностями при использовании небольшого числа гармоник.

1. Восстановление разрывного профиля по ограниченному спектру

Рассмотрим периодическую последовательность ударных импульсов $P(\tau)$ с выбранным периодом 2π (рис. 1). Для учета особенностей типа «разрыв» и «разрыв производной» представим профиль такой волны в виде суммы пилообразной волны V_0, периодической параболы V_1 с разрывом производной, соответствующим разрыву производной импульса, и плавного профиля V_{sm}:

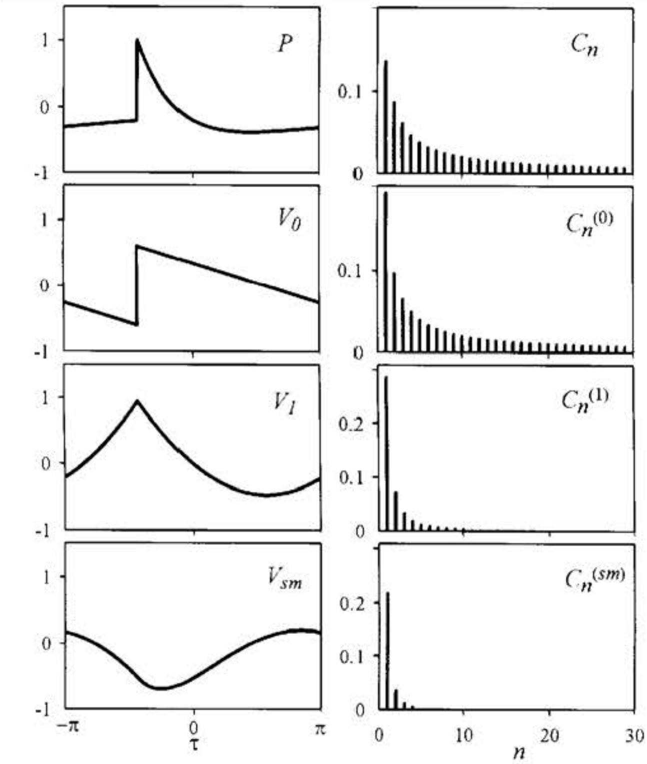

Рис. 1. Представление профиля (слева) и спектра (справа) периодической волны с особенностями типа «разрыв» и «разрыв производной» в виде суммы пилообразной волны, периодической параболы и гладкого профиля

$$P(z,\tau) = V_0 + V_1 + V_{sm}, \tag{1}$$

где

$$V_0 = \frac{A_0}{2} \begin{cases} -1 - (\tau - \tau_s)/\pi, & -\pi < \tau < \tau_s, \\ 1 - (\tau - \tau_s)/\pi, & \tau_s < \tau < \pi, \end{cases} \tag{2}$$

$$V_1 = \frac{\pi A_1}{12} \begin{cases} \left(3(\tau - \tau_s - \pi)^2/\pi^2 - 1\right), & -\pi < \tau < \tau_s, \\ \left(3(\tau - \tau_s + \pi)^2/\pi^2 - 1\right), & \tau_s < \tau < \pi. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь A_0 — амплитуда разрыва, A_1 — амплитуда разрыва производной, τ_s — положение особенностей внутри периода. Если перейти к спектральному представлению

$$P(z,\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n(z) \exp(-in\tau), \tag{4}$$

то в силу линейности преобразования Фурье спектр исходного сигнала $P(\tau)$ (1) будет также состоять из суммы спектров «пилы» (2), «параболы» (3) и плавного профиля:

$$C_n = C_n^{(0)} + C_n^{(1)} + C_n^{(sm)}, \tag{5}$$

где

$$C_n^{(0)} = iA_0 \,\mathrm{e}^{in\tau_s}/2\pi n, \quad C_n^{(1)} = A_1 \,\mathrm{e}^{in\tau_s}/2\pi n^2. \tag{6}$$

Как видно из рис. 1, где изображены абсолютные значения амплитуд гармоник (5) соответствующих профилей, спектр плавной составляющей убывает очень быстро, и уже начиная со сравнительно небольшого номера гармоник $N > (20\text{–}30)$ его вкладом в спектр исходного сигнала можно пренебречь и рассматривать только асимптотическую часть исходного сигнала:

$$C_n \approx C_n^{(0)} + C_n^{(1)}, \quad n > N. \tag{7}$$

Параметры асимптотик A_0, A_1 и τ_s (6) можно определить, предположив, что последние два из известных коэффициентов Фурье с номерами $N, N-1$ описываются асимптотическим выражением (7). Тогда для них можно написать следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} C_N &= \frac{\exp(iN\tau_s)}{2\pi N}\left(iA_0 + \frac{A_1}{N}\right), \\ C_{N-1} &= \frac{\exp(i(N-1)\tau_s)}{2\pi(N-1)}\left(iA_0 + \frac{A_1}{(N-1)}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Из системы уравнений (8) определяются необходимые параметры асимптотик A_0, A_1 и τ_s:

$$\begin{aligned} A_0 &= 2\pi\sqrt{\left(N^4|C_N|^2 - (N-1)^4|C_{N-1}|^2\right)/(2N-1)}, \\ A_1 &= 2\pi N(N-1)\times \\ &\quad\times\sqrt{\left(N^2|C_N|^2 - (N-1)^2|C_{N-1}|^2\right)/(2N-1)}, \\ \tau_s &= \arg\frac{C_N N^2}{C_{N-1}(N-1)^2}\left(1 - \frac{iA_0}{iA_0 N + A_1}\right). \end{aligned}$$

Профиль волны тогда может быть восстановлен как сумма гладкой составляющей, пилообразной волны и периодической параболы соответственно:

$$\begin{aligned} P(z,\tau) &= \sum_{n=-N}^{N} C_n(z)\exp(-in\tau) - \\ &- \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\pi}\left(A_0\sin(n(\tau-\tau_s)) + \frac{A_1}{n}\cos(n(\tau-\tau_s))\right) + \\ &+ \frac{A_0}{2}\begin{cases} -1-(\tau-\tau_s)/\pi \\ 1-(\tau-\tau_s)/\pi \end{cases} + \\ &+ \frac{\pi A_1}{12}\begin{cases} \left(3(\tau-\tau_s-\pi)^2/\pi^2-1\right), & 0<\tau<\tau_s, \\ \left(3(\tau-\tau_s+\pi)^2/\pi^2-1\right), & \tau_s<\tau<2\pi. \end{cases} \end{aligned} \tag{9}$$

2. Нелинейное распространение разрывных волн

Классический пример волнового процесса, при котором образуется ударный фронт, описывается уравнением простых волн [10]:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = P\frac{\partial P}{\partial \tau}. \tag{10}$$

Здесь $P = p/p_0$ — безразмерное давление, $z = x/x_n$ — безразмерная координата, выраженная в характерных нелинейных длинах $x_n = c_0^3\rho_0/(\varepsilon p_0\omega_0)$, ε — коэффициент нелинейности среды, $\tau = \omega_0(t - x/c_0)$ — безразмерное время. В спектральном представлении (4) уравнение (10) можно переписать так:

$$\frac{dC_n}{dz} = -\frac{in}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k C_{n-k}$$

или с учетом, что $C_{-k} = C_k^*$ (звездочкой обозначено комплексное сопряжение), в более удобной форме:

$$\frac{dC_n}{dz} = -\frac{in}{2}\left(2C_0C_n + \sum_{k=1}^{n-1} C_kC_{n-k} + 2\sum_{k=n+1}^{\infty} C_kC_{n-k}^*\right). \tag{11}$$

Система уравнений (11) является бесконечной системой связанных нелинейных уравнений с бесконечным числом переменных C_n. Учитывая асимптотическое поведение спектра на высоких частотах, будем решать ее для первых N гармоник, аппроксимируя в правых частях уравнений амплитуды гармоник с номерами $n > N$ соответствующими асимптотическими выражениями (7):

$$\frac{dC_n}{dz} = -in\left(C_0C_n + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} C_kC_{n-k} + \sum_{k=n+1}^{N} C_kC_{k-n}^* + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=N+1}^{N+n} \tilde{C}_kC_{k-n}^* + \sum_{k=N+n+1}^{\infty} \tilde{C}_k\tilde{C}_{k-n}^*\right), \tag{12}$$

где

$$\tilde{C}_k = \frac{\exp(ik\tau_s)}{2\pi k}\left(iA_0 + \frac{A_1}{k}\right),$$
$$\tilde{C}_{k-n}^* = \frac{\exp(-i(k-n)\tau_s)}{2\pi(k-n)}\left(-iA_0 + \frac{A_1}{(k-n)}\right). \tag{13}$$

Все ряды в системе (12) конечны, кроме последнего, сумма которого вычисляется с учетом известного вида коэффициентов (13). После несложных преобразований получаем

$$\sum_{k=N+n+1}^{\infty} \tilde{C}_k\tilde{C}_{k-n}^* = \frac{\exp(in\tau_s)}{(2\pi)^2}\Bigg(A_0^2K(N,n) +$$
$$+ \frac{iA_1A_0n + A_1^2}{n^2}\left(\frac{\pi^2}{3} - 2K(N,n) - R(N) - R(N+n)\right)\Bigg), \tag{14}$$

где

$$K(N,n) = \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{N+n}\frac{1}{k}, \quad R(N) = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2}.$$

Таким образом, мы получили замкнутую систему конечного числа N обыкновенных дифференциальных уравнений для конечного числа N амплитуд гармоник, которая может быть использована для численного решения задачи.

3. Эволюция импульса с ударным фронтом в нелинейной среде

Для иллюстрации развитого подхода приведем результаты моделирования одиночных ударных импульсов различной формы, распространяющихся в нелинейной среде. Интегрирование системы уравнений (14) проводилось численно методом Рунге–Кутта 4-го порядка для первых $N = 30$ гармоник. На рис. 2, *а* представлена эволюция профиля однополярного импульса сжатия:

$$P(z=0,\tau) = \exp\left(-(\tau - \tau_s + 2\pi)/\tau_0\right), \quad -\pi < \tau < \tau_s,$$
$$P(z=0,\tau) = \exp\left(-(\tau - \tau_s)/\tau_0\right), \quad \tau_s < \tau < \pi, \tag{15}$$

на различных расстояниях z (цифры у кривых) и $\tau_0 = 0{,}8$. Для сравнения на рис. 2, *б* приведены результаты численного моделирования распространения импульса с использованием алгоритма [5], где учитывалась только одна асимптотика пилообразной волны. Как видно из рис. 2, *б*, метод, не учитывающий разрыв производной, не позволяет описывать

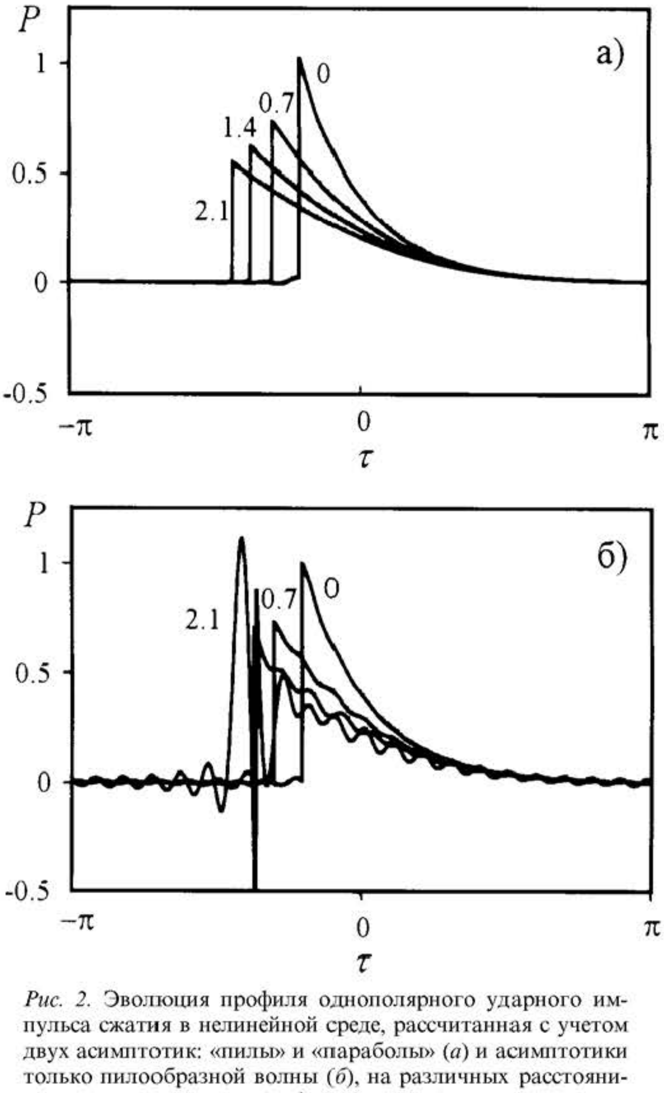

Рис. 2. Эволюция профиля однополярного ударного импульса сжатия в нелинейной среде, рассчитанная с учетом двух асимптотик: «пилы» и «параболы» (*а*) и асимптотики только пилообразной волны (*б*), на различных расстояниях z (цифры у кривых)

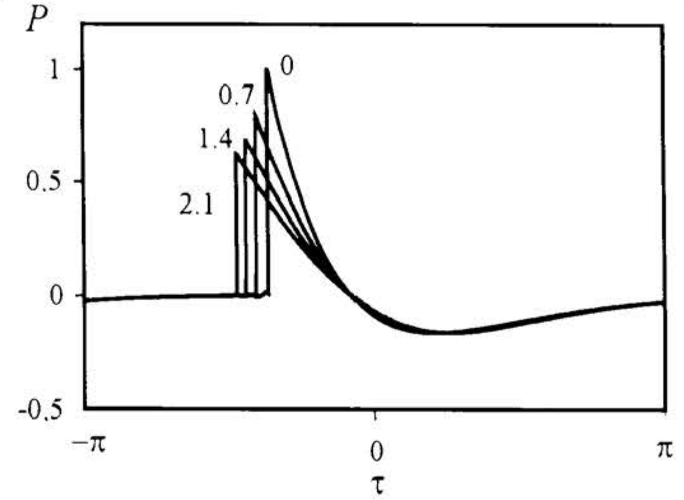

Рис. 3. Эволюция профиля двухполярного ударного импульса в нелинейной среде, рассчитанная с учетом двух асимптотик: «пилы» и «параболы» на различных расстояниях z (цифры у кривых)

такие импульсы — численное решение становится неустойчивым. Учет более точной асимптотики для аппроксимации высокочастотной части спектра импульса (см. рис. $2, a$) обеспечивает устойчивость численного решения задачи, а также улучшает качество восстановления профиля сигнала по рассчитанному ограниченному спектру.

Эволюция двухполярного разрывного импульса с отрицательной фазой

$$P(z=0,\tau)=2\exp\Big(-\frac{\tau-\tau_s+2\pi}{\tau_0}\Big)\cos\Big(\frac{\tau-\tau_s}{\sqrt{3}\tau_0}+\frac{\pi}{3}\Big),\quad -\pi<\tau<\tau_s,$$

$$P(z=0,\tau)=2\exp\Big(-\frac{\tau-\tau_s}{\tau_0}\Big)\cos\Big(\frac{\tau-\tau_s}{\sqrt{3}\tau_0}+\frac{\pi}{3}\Big),\quad \tau_s<\tau<\pi, \tag{16}$$

профиль которого характерен для ударных импульсов, используемых в литотрипсии, аналогично представлена на рис. 3 ($\tau_0 = 1$). Разрыв производной в профиле (16) до и после фронта имеет еще большую величину, чем для однополярного импульса (15), однако решение по-прежнему устойчиво. Как видно из приведенных примеров, использование двух высокочастотных асимптотик, соответствующих спектру волны с особенностями типа «разрыв» и «разрыв производной», для моделирования распространения разрывных волн и восстановления профиля по ограниченному спектру позволяет улучшить устойчивость и точность модифицированного спектрального подхода [5] и расширить возможности для численного решения задач.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 98-02-17318), программы «Университеты России» (грант 1-5286) и гранта Немецкого общества академических обменов DAAD Leonard Euler Fellowship Program.

Литература

1. *Lee Y.S., Hamilton M.F.* // J. Acoust. Soc. Am. 1995. **97**. P. 906.
2. *Tjotta N., Tjotta S., Vefring E.H.* // J. Acoust. Soc. Am. 1991. **89**. P. 1017.
3. *Christopher P.T., Parker K.J.* // J. Acoust. Soc. Am. 1991. **90**. P. 488.
4. *Dubrovsky A.N., Khokhlova V.A., Sapozhnikov O.A.* // Proc. 13th Int. Symp. Nonlin. Acoust. Bergen, Norway, 1993. P. 227.
5. *Пищальников Ю.А., Сапожников О.А., Хохлова В.А.* // Акуст. журн. 1996. **42**, №3. С. 412.
6. *Eckhoff K.S.*// Math. Comp. 1993. **61**. P. 745.
7. *Eckhoff K.S.*// Math. Comp. 1995. **64**. P. 671.
8. *Khokhlova V.A., Sapozhnikov O.A., Crum L.A.* // J. Acoust. Soc. Am. 1997. **102**. P. 3155.
9. *Полякова А.Л., Солуян С.И., Хохлов Р.В.* // Акуст. журн. 1962. **8**, № 1. С. 107.
10. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.

Поступила в редакцию
20.11.98