где $k = (2V_0a)^{-1}$. Отсюда легко получить спектр УШ с кулоновским потенциалом ($k \to 0$): $\lambda_0 = 2$ при $n_r = 0$; $\lambda_1 = 4$ при $n_r = 1$.

Авторы глубоко благодарны В. Ф. Березницкой за постоянное внимание, А. В. Борисову, В. Ч. Жуковскому и Ю. М. Лоскутову за плодотворное обсуждение результатов работы.

Литература

1. *Quigg C., Rosner J.L.* // Phys. Rep. 1979. **56**. С. 167.
2. *Вшивцев А.С., Норин Н.В., Сорокин В.Н.* // ТМФ. 1996. **109**, № 1. С. 107.
3. *Вшивцев А.С., Вшивцев В.А., Татаринцев А.В., Френкин А.Р.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. № 5. С. 62 (Moscow University Phys. Bull. 1999. No. 5).

Поступила в редакцию 04.06.99

УДК 517.958

О ВОЛНОВОДЕ В РЕЖИМЕ НЕВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛН

А. Н. Боголюбов, А. Л. Делицын, А. Г. Свешников

(*кафедра математики*)

Рассматривается задача излучения электромагнитных волн в волноводе. Устанавливается существование токов, не излучающих бегущие волны. Рассматриваемое явление согласуется с известной схемой Л. А. Вайнштейна. В то же время известные методы не позволяют выделить подобный класс решений.

В работе авторов [1] рассматривалась достаточно общая схема решения задачи возбуждения волновода с неоднородным заполнением. В настоящей работе предлагается подход, который позволяет доказать, что существуют комбинации токов и зарядов, не возбуждающие бегущие волны в волноводе.

Рассмотрим полый волновод, возбуждаемый переменным током и зарядами, расположенными в конечной области $(x, y) \in \Omega' \subset \Omega, z \in [z_1, z_2]$. Ток и заряды имеют вид (j_z-компонента — произвольна)

$$j_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad j_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho = -i\frac{\omega}{c^2}\psi,$$

где $\psi(x, y, z)$ — решение задачи

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k^2\psi = \frac{\partial j_z}{\partial z}, (x, y) \in \Omega, \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1)$$

параметр $k = \omega/c$. Таким образом, $\psi(x, y, z)$ является решением двумерной задачи, в которую переменная z входит как параметр, и функция ψ не равна тождественно нулю при $z_1 < z < z_2$. Данный ток определяется своей j_z-компонентой. Легко видеть, что таким образом выбранный ток удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} - i\omega\rho = 0.$$

Рассмотрим задачу возбуждения полого волновода этим током и покажем, что токи указанного вида не возбуждают бегущих волн. Для этого используем развиваемый авторами подход [1–3]. Запишем уравнения Максвелла в виде

$$a_1A_1 = \frac{\partial A_2}{\partial z}, \quad a_2A_2 = \frac{\partial A_1}{\partial z} + J, \quad (2)$$

$$(\operatorname{rot} H)_z + ikE_z = \frac{4\pi}{c}j_z, \quad (\operatorname{rot} E)_z - ikH_z = 0,$$

где $A_1 = (H_x, H_y, E_z)$, $A_2 = (E_x, E_y, H_z)$, $J = (4\pi/c)(-j_y, j_x, -c\rho)$,

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & ik & \frac{\partial}{\partial x} \\ -ik & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & -ik & \frac{\partial}{\partial x} \\ ik & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}.$$

Граничные условия имеют вид

$$Hn|_{\partial Q} = 0, \quad E \times n|_{\partial Q} = 0.$$

Покажем, что существует решение задачи (2), имеющее вид

$$A_2 \equiv 0,$$

$$(A_{1_x}, A_{1_y}) = \operatorname{rot}(\phi e_z), \quad A_{1_z} = ik\phi,$$

где $\phi = \int\limits_{z_1}^{z} \psi dz$. При этом вне области $z_1 < z < z_2$ поле $A_1(x, y, z) = 0$. То есть ток указанного вида не возбуждает бегущих волн. Действительно, в силу того что, по предположению,

$$A_1 = (\operatorname{rot}(\phi e_z), ik\phi), \quad A_2 = 0,$$

и, как легко проверить, $a_1A_1 = 0$, первое уравнение (2) выполняется для любого вектора указанного типа. Второе уравнение имеет вид

$$-\frac{\partial A_1}{\partial z} = J.$$

Это уравнение имеет решение, обращающееся в нуль при $z \leqslant z_1$, вида

$$A_1 = -\int\limits_{-\infty}^{z} J dz.$$

При этом A_1 обращается в нуль при $z < z_1$, поскольку $J(x,y,z) = 0$ при $z < z_1$ и $z > z_2$. Так что при $z > z_1$ решение принимает вид $A_1 = -\int\limits_{z_1}^{z} J dz$.

Покажем, что A_1 обращается в нуль при $z \geqslant z_2$.

Поскольку $J = (\mathrm{rot}(\psi e_z), ik\psi)$, то вектор A_1 действительно имеет вид $A_1 = (\mathrm{rot}(\phi e_z), ik\phi)$. Достаточно показать, что $\phi = 0$ при $z \geqslant z_2$. Определим ψ, являющееся решением задачи (1), спектральным методом. Пусть ψ_n — собственные функции задачи

$$\Big(\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\psi_n e_z))\Big)_z - k^2\psi_n = \lambda_n \psi_n,$$

$$(x,y) \in \Omega, \quad \psi_n|_{\partial\Omega} = 0.$$

Будем искать решение задачи (1) в форме

$$\psi = \sum_n a_n(z)\psi_n(x,y).$$

Представим правую часть в виде ряда по собственным функциям:

$$-\frac{\partial j_z}{\partial z} = -\sum_n \left(\int\limits_\Omega \frac{\partial j_z}{\partial z}\psi_n dS\right)\psi_n(x,y) = $$
$$= -\frac{\partial}{\partial z}\sum_n \left(\int\limits_\Omega j_z\psi_n dS\right)\psi_n(x,y).$$

Тогда

$$a_n(z) = -\frac{1}{\lambda_n}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\Omega j_z\psi_n dS.$$

Отсюда получаем ψ:

$$\psi = -\sum_n \frac{1}{\lambda_n}\left(\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\Omega j_z\psi_n dS\right)\psi_n,$$

а

$$\phi = \int\limits_{z_1}^{z}\psi\, dz = -\sum_n \frac{1}{\lambda_n}\left(\int\limits_{z_1}^{z}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\Omega j_z\psi_n dS\right)\psi_n = $$
$$= -\sum_n \frac{1}{\lambda_n}\left(\int\limits_\Omega j_z(x,y,z)\psi_n dS\right)\psi_n.$$

При $z \geqslant z_2$ по условию $j_z = 0$, следовательно, и функция ϕ, и вектор A_1 равны нулю при $z > z_2$. Таким образом, мы установили, что ток вида $J = (\mathrm{rot}(\psi e_z), ik\psi)$, где $\psi(x,y,z)$ — решение задачи (1) с произвольной правой частью, не возбуждает бегущих волн.

Покажем, что полученный результат согласуется с достаточно распространенной схемой Л. А. Вайнштейна [4]. В этом методе предполагается, что вне области, занятой токами, поле может быть разложено в ряды по нормальным волнам вида

$$E = \sum_n c_{\pm n} E_{\pm n}\exp(\pm i\gamma_n z),$$

$$H = \sum_n c_{\pm n} H_{\pm n}\exp(\pm i\gamma_n z),$$

где $E_{\pm n}\exp(\pm i\gamma_n z)$, $H_{\pm n}\exp(\pm i\gamma_n z)$ — нормальные волны или решения модового вида однородной системы Максвелла. Коэффициенты $c_{\pm n}$ в случае локального тока $\mathrm{supp} j \subset ((x,y)\in\Omega, z\in[z_1,z_2])$ при $z < z_1$ и $z > z_2$ вычисляются следующим образом:

$$c_{\pm n} = \int\limits_\Omega\int\limits_{z_1}^{z_2}(jE_{\pm n})\exp(\pm i\gamma_n z)dzdS.$$

Коэффициенты $c_{\pm n}$ в данном случае будут равны нулю. Как известно [5, 6], $E_n(x,y)$ с точностью до константы, общей для всех n, имеет либо вид

$$E_{z_n} = 0, \quad E_{x_n} = \frac{ik}{k^2-\gamma_n^2}\frac{\partial H_{z_n}}{\partial y}, \quad E_{y_n} = -\frac{ik}{k^2-\gamma_n^2}\frac{\partial H_{z_n}}{\partial x},$$

либо вид

$$E_{z_n} \neq 0, \quad E_{x_n} = \frac{i\gamma_n}{k^2-\gamma_n^2}\frac{\partial E_{z_n}}{\partial x}, \quad E_{y_n} = \frac{i\gamma_n}{k^2-\gamma_n^2}\frac{\partial E_{z_n}}{\partial y},$$

где E_{z_n}- и H_{z_n}-компоненты являются решениями задач

$$\frac{\partial^2 E_{z_n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{z_n}}{\partial y^2} + k^2 E_{z_n} = \gamma_n^2 E_{z_n},$$

$$(x,y)\in\Omega, \quad E_{z_n}|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 H_{z_n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{z_n}}{\partial y^2} + k^2 H_{z_n} = \gamma_n^2 H_{z_n},$$

$$(x,y)\in\Omega, \quad \frac{\partial H_{z_n}}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0.$$

Подставляя поля E_n, H_n в формулы для вычисления коэффициентов $c_{\pm n}$, убеждаемся в том, что

$$c_{+n} = \int\limits_{z_1}^{z_2}\int\limits_\Omega (jE_n)\exp(\pm i\gamma_n z)dzdS = 0.$$

Поэтому бегущие волны не возбуждаются. Полученные результаты можно распространить на случай возбуждения локальными током и зарядом регулярного волновода с произвольным заполнением. Однако этот значительно более сложный случай заслуживает специального рассмотрения и будет предметом отдельной публикации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 97-01-01081).

Литература

1. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Свешников А.Г.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. №4. С. 6 (Moscow University Phys. Bull. 1999. No. 4).

2. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Свешников А.Г.* // ЖВМ и МФ. 1998. № 11. С. 1981.
3. *Делицын А.Л.* // ЖВМ и МФ. 1999. № 2. С. 315.
4. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1988.
5. *Ильинский А.С., Слепян Г.Я.* Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
6. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики. М.: Высш. школа, 1991.

Поступила в редакцию
07.07.99

УДК 530.145

ОДНОПЕТЛЕВЫЕ ПОПРАВКИ В $d = 2 + 1$ КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ

В. Ч. Жуковский, Н. А. Песков

(*кафедра теоретической физики*)

Вычислен бозонный однопетлевой вклад в эффективный потенциал калибровочного поля. В качестве внешнего фонового поля были выбраны точные постоянные решения для полей Янга–Миллса (классической неабелевой теории поля) с черн-саймоновской массой в пространстве размерности $d = 2 + 1$. В этом поле найдены пропагаторы кварков и глюонов. Вычислены также однопетлевой массовый оператор и радиационный сдвиг энергии фермиона для случая, когда его масса равна $m = \theta/4$.

В 1981 г. Дж. Шонфельд и позднее, в 1982 г., С. Дезер, Р. Джакив и С. Темплтон показали, как можно построить калибровочно-инвариантную теорию с массивным калибровочным полем [1]. С тех пор $(2+1)$-мерные теории привлекают к себе внимание не только своей необычностью: интерес к массивным калибровочным теориям подогревается их способностью предсказывать и описывать замечательные физические эффекты, примерами которых могут служить квантовый эффект Холла, высокотемпературная сверхпроводимость и др.

Исследованию структуры вакуума калибровочных теорий посвящено множество работ. Одним из направлений в изучении свойств вакуума является вычисление и анализ однопетлевого эффективного потенциала на фоне заданного внешнего поля — конденсата. В данной заметке рассмотрен однопетлевой вклад в эффективный потенциал. Условия возникновения конденсата не рассматриваются.

Для двумерной $SU(2)$-глюодинамики потенциалов $A_\mu \equiv \tau^a A^a_\mu/2$, где $a = 1, 2, 3$, τ^a — матрицы Паули в цветовом пространстве, лагранжиан массивного калибровочного поля выглядит следующим образом:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\,\mu\nu} - \frac{\theta}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\left(F^a_{\mu\nu}A^a_\alpha - \frac{g}{3}\varepsilon^{abc}A^a_\mu A^b_\nu A^c_\alpha\right) - \\ - \frac{1}{2\xi}\left(D^{ab}_\mu a^{b\,\mu}\right)^2 + \left(D^{ab}_\mu \overline{\eta}^b\right)\left(\nabla^{ac\,\mu}\eta^c\right), \qquad (1)$$

где напряженность $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\varepsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$, полное поле представляется в виде суммы классического и квантованного полей: $A_\mu = A^{\text{ext}}_\mu + a_\mu$, $\nabla^{ab}_\mu = \delta^{ab}\partial_\mu - g\varepsilon^{acb}A^c_\mu$, $D^{ab}_\mu = \delta^{ab}\partial_\mu - g\varepsilon^{acb}A^{c\,\text{ext}}_\mu$, а $\overline{\eta}^b$ и η^b — поля духов. Коэффициент θ в (1) играет роль массы калибровочного поля. В качестве внешнего поля выберем точное решение уравнения Янга–Миллса [2]

$$A^{a\,\mu\text{ext}} = \frac{\theta}{2g}\delta^{a\mu}\chi^{(a)}_{\lambda\omega}, \qquad (2)$$

где единичный вектор $\chi^{(a)}_{\lambda\omega} = (\lambda i, \lambda\omega i, \omega)$, а $\omega = \pm 1$, $\lambda = \pm 1$.

Для заданной конфигурации внешнего поля (2) плотность энергии определяется из симметризованного тензора энергии-импульса и оказывается равной $E = \mathcal{T}^{00} = -\theta^4/(32g^2)$.

Рассмотрим далее однопетлевой эффективный потенциал

$$V_{\text{eff}} = E + \mathcal{E}^{(1)}_G + \mathcal{E}^{(1)}_Q$$

с учетом вкладов как глюонной ($\mathcal{E}^{(1)}_G$), так и кварковой ($\mathcal{E}^{(1)}_Q$) петель. Для этого достаточно рассмотреть линеаризованные уравнения полей или, что эквивалентно этому, оставить в лагранжиане (1) лишь квадратичные члены. Это было сделано в работе [2], но, к сожалению, там была допущена существенная неточность при вычислении глюонного вклада: 1) в эффективном потенциале учтены *все* ветви энергетического спектра, включая и те, которые отвечают нефизическим степеням свободы глюонов; 2) потерян множитель $1/2$ в формуле для глюонного вклада в эффективный потенциал, происхождение которого вполне ясно из выражения для однопетлевого поляризационного вклада в энергию вакуума за счет глюонных петель $\mathcal{E}^{(1)}_G = -\ln \text{Det}^{-1/2} D^{-1}$. Нефизический вклад глюонов исключается вследствие учета духов. Рассмотрим вклад духов. Уравнения движения для духов имеют вид

$$(D^2)^{ab}\eta^b = 0,$$