

2. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Свейников А.Г. // ЖВМ и МФ. 1998. № 11. С. 1981.
3. Делицын А.Л. // ЖВМ и МФ. 1999. № 2. С. 315.
4. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1988.
5. Ильинский А.С., Слепян Г.Я. Колебания и волны в элект-

родинамических системах с потерями. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.

6. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свейников А.Г. Математические модели электродинамики. М.: Высш. школа, 1991.

Поступила в редакцию
07.07.99

УДК 530.145

ОДНОПЕТЛЕВЫЕ ПОПРАВКИ В $d = 2 + 1$ КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ

В. Ч. Жџовский, Н. А. Песков

(кафедра теоретической физики)

Вычислен бозонный однопетлевой вклад в эффективный потенциал калибровочного поля. В качестве внешнего фонового поля были выбраны точные постоянные решения для полей Янга–Миллса (классической неабелевой теории поля) с черн-саймоновской массой в пространстве размерности $d = 2 + 1$. В этом поле найдены пропагаторы кварков и глюонов. Вычислены также однопетлевой массовый оператор и радиационный сдвиг энергии фермиона для случая, когда его масса равна $m = \theta/4$.

В 1981 г. Дж. Шонфельд и позднее, в 1982 г., С. Дежер, Р. Джакв и С. Темплтон показали, как можно построить калибровочно-инвариантную теорию с массивным калибровочным полем [1]. С тех пор $(2 + 1)$ -мерные теории привлекают к себе внимание не только своей необычностью: интерес к массивным калибровочным теориям подогревается их способностью предсказывать и описывать замечательные физические эффекты, примерами которых могут служить квантовый эффект Холла, высокотемпературная сверхпроводимость и др.

Исследованию структуры вакуума калибровочных теорий посвящено множество работ. Одним из направлений в изучении свойств вакуума является вычисление и анализ однопетлевого эффективного потенциала на фоне заданного внешнего поля — конденсата. В данной заметке рассмотрен однопетлевой вклад в эффективный потенциал. Условия возникновения конденсата не рассматриваются.

Для двумерной $SU(2)$ -глюодинамики потенциалов $A_\mu \equiv \tau^a A_\mu^a/2$, где $a = 1, 2, 3$, τ^a — матрицы Паули в цветовом пространстве, лагранжиан массивного калибровочного поля выглядит следующим образом:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{\theta}{4} \epsilon^{\mu\nu\alpha} \left(F_{\mu\nu}^a A_\alpha^a - \frac{g}{3} \epsilon^{abc} A_\mu^a A_\nu^b A_\alpha^c \right) - \frac{1}{2\xi} \left(D_\mu^{ab} a^{b\mu} \right)^2 + \left(D_\mu^{ab} \bar{\eta}^b \right) (\nabla^{ac\mu} \eta^c), \quad (1)$$

где напряженность $F_{\mu\nu}^a = \partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a + g\epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$, полное поле представляется в виде суммы классического и квантованного полей: $A_\mu = A_\mu^{\text{ext}} + a_\mu$, $\nabla_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu - g\epsilon^{acb} A_\mu^c$, $D_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu - g\epsilon^{acb} A_\mu^c$, а $\bar{\eta}^b$ и η^b — поля духов. Коэффициент θ в (1) играет роль массы калибровочного поля. В качестве внешнего поля выберем точное решение уравнения

Янга–Миллса [2]

$$A^{\mu\text{ext}} = \frac{\theta}{2g} \delta^{a\mu} \chi_{\lambda\omega}^{(a)}, \quad (2)$$

где единичный вектор $\chi_{\lambda\omega}^{(a)} = (\lambda i, \lambda \omega i, \omega)$, а $\omega = \pm 1$, $\lambda = \pm 1$.

Для заданной конфигурации внешнего поля (2) плотность энергии определяется из симметризованного тензора энергии-импульса и оказывается равной $E = T^{00} = -\theta^4/(32g^2)$.

Рассмотрим далее однопетлевой эффективный потенциал

$$V_{\text{eff}} = E + \mathcal{E}_G^{(1)} + \mathcal{E}_Q^{(1)}$$

с учетом вкладов как глюонной ($\mathcal{E}_G^{(1)}$), так и кварковой ($\mathcal{E}_Q^{(1)}$) петель. Для этого достаточно рассмотреть линейризованные уравнения полей или, что эквивалентно этому, оставить в лагранжиане (1) лишь квадратичные члены. Это было сделано в работе [2], но, к сожалению, там была допущена существенная неточность при вычислении глюонного вклада: 1) в эффективном потенциале учтены все ветви энергетического спектра, включая и те, которые отвечают нефизическим степеням свободы глюонов; 2) потерян множитель $1/2$ в формуле для глюонного вклада в эффективный потенциал, происхождение которого вполне ясно из выражения для однопетлевого поляризационного вклада в энергию вакуума за счет глюонных петель $\mathcal{E}_G^{(1)} = -\ln \text{Det}^{-1/2} D^{-1}$. Нефизический вклад глюонов исключается вследствие учета духов. Рассмотрим вклад духов. Уравнения движения для духов имеют вид

$$(D^2)^{ab} \eta^b = 0,$$

где $(D^2)^{ab} = D_\mu^{ac} D^{cb\mu}$. Эти уравнения позволяют найти спектр энергии духов, который определяется из следующего условия:

$$\det \left[(p^2 + \frac{1}{2}\theta^2) \delta^{ab} + i\theta \epsilon^{abc} \delta^{c\mu} \chi_{\lambda\omega}^{(c)} p_\mu \right] = 0.$$

Полученное уравнение дает три ветви энергии: $\epsilon_{\text{ghi}}^2 = \mathbf{p}^2 + (1/2)\zeta_i \theta^2$, где $\zeta_1 = -1$, $\zeta_{2,3} = \pm i$. Вклад духов в эффективный потенциал дается равенством

$$\mathcal{E}_G^{(1)} \text{ unphys} = - \sum_{\mathbf{p}, i} \epsilon_{\text{ghi}}(\mathbf{p}).$$

Знак «минус» перед суммой определяется ферми-статистикой духов. Так же как в случае глюонов, ветвь ϵ_{gh1} вносит вклад только в мнимую часть эффективного потенциала (см. [2]). Поэтому

$$\text{Im } \mathcal{E}_G^{(1)} \text{ unphys} = - \frac{1}{12\sqrt{2}\pi} |\theta|^3.$$

Две оставшиеся экзотические ветви энергии, как легко видеть, вносят вклад лишь в вещественную часть:

$$\begin{aligned} \text{Re } \mathcal{E}_G^{(1)\text{reg}} \text{ unphys} &= -\mu^{2\epsilon} \sum_{\mathbf{p}, i=2,3} [\mathbf{p}^2 + \frac{1}{2}\zeta_i \theta^2]^{1/2-\epsilon} = \\ &= - \frac{\mu^2}{2\pi\Gamma(\epsilon - \frac{1}{2})} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{5/2-\epsilon}} \cos \frac{s\theta^2}{2}. \end{aligned}$$

Несложные вычисления приводят к следующему результату: $\text{Re } \mathcal{E}_G^{(1)} \text{ unphys} = -[1/(12\pi)]|\theta|^3$.

Таким образом, получаем выражение для вклада бозонного сектора в $d = 3$ эффективный потенциал:

$$V_{\text{eff}} \equiv E + \text{Re } \mathcal{E}_G^{(1)} = - \frac{\theta^4}{32g^2} - \frac{|\theta|^3}{2\pi} \left(1 + \frac{3\sqrt{6}}{4} \right),$$

$$\text{Im } \mathcal{E}_G^{(1)} = - \frac{7}{24\sqrt{2}\pi} |\theta|^3.$$

Представляет интерес рассмотреть радиационный сдвиг энергии кварка, находящегося во внешнем поле A_μ^{ext} , заданном постоянным потенциалом (2). В этом поле были найдены пропагаторы кварков и глюонов. Функция Грина для кварков в импульсном представлении оказывается равной

$$\begin{aligned} S(p) &= [(p^2 - m_{\text{eff}1}^2)(p^2 - m_{\text{eff}2}^2)]^{-1} \times \\ &\times \left\{ [p^2 - (m - \frac{1}{4}\theta)^2][\gamma^\mu(p_\mu + gA_\mu) + m] - \right. \\ &\left. - 2(\gamma^\mu p_\mu + m - \frac{1}{4}\theta)[gA^\nu p_\nu + \frac{1}{4}\theta(m - \frac{1}{4}\theta)] \right\}, \end{aligned}$$

где $m_{\text{eff}1}^2 = (m - \theta/4)^2$ и $m_{\text{eff}2}^2 = (m + \theta/4)^2 - \theta^2/4$. Пропагатор флуктуаций глюонного поля во внешнем

глюонном поле (2) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}^{ab} &= \delta^{ab} g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2\mathcal{E}} + \frac{\mathcal{E}}{2\alpha} \right) - \frac{4g^2}{\theta^2} A_\mu^a A_\nu^b \left(\frac{1}{3\mathcal{E}} - \frac{\mathcal{E}}{3\beta} \right) + \\ &+ \frac{4g^2}{\theta^2} A_\nu^a A_\mu^b \left(\frac{1}{2\mathcal{E}} - \frac{\mathcal{E}}{2\alpha} \right) + \frac{16g^2\mathcal{E}}{\theta^2\alpha\beta} F_{\mu\alpha}^a F_{\nu\beta}^b p^\alpha p^\beta + \\ &+ \frac{8ig^2}{\theta^2\beta} (F_{\mu\alpha}^a A_\nu^b - F_{\nu\alpha}^b A_\mu^a) p^\alpha + \frac{16ig^2}{\theta^3\alpha} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} F_{\mu\alpha}^a F_{\nu\beta}^b p_\gamma, \end{aligned}$$

где $\mathcal{E} = p^2 + \frac{1}{2}\theta^2$, $\alpha = \mathcal{E}^2 - 4\theta^2 p^2$ и $\beta = \mathcal{E}^2 - 6\theta^2 p^2$.

Наиболее интересна ситуация, когда $m = \theta/4$. Помимо того, что в этом случае эффективные массы кварков оказываются равными нулю, при условии $m_{\text{eff}1} = m_{\text{eff}2} = 0$ состояния кварков становятся неразличимыми по цвету. Решением уравнения Дирака является плоская волна $\psi(x) = (2\pi)^{-1} e^{\mathbf{p}\mathbf{x}}(-i\epsilon t + i\mathbf{p}\mathbf{x})u(p)$, где $u(p)$ — постоянный спинор. Решая уравнение Дирака при $p \neq 0$, найдем:

$$u(p) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} [\lambda(\kappa-1) + (\kappa+1)][(\omega+1)e^{i\phi} + (\omega-1)] \\ -[\lambda(\kappa-1) - (\kappa+1)][(\omega-1)e^{-i\phi} + (\omega+1)] \\ [\lambda(\kappa+1) - (\kappa-1)][(\omega-1)e^{i\phi} + (\omega+1)] \\ [\lambda(\kappa+1) + (\kappa-1)][(\omega+1)e^{-i\phi} + (\omega-1)] \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь две верхние компоненты спинора описывают одно цветовое состояние, а две нижние компоненты — другое, $\kappa = \pm 1$ — знак энергии ($\epsilon \equiv p_0 = \kappa|\mathbf{p}|$). Фазу ϕ определяют соотношения $p^2 \pm ip^1 = |\mathbf{p}| e^{\pm i\phi}$.

Однопетлевая поправка к энергии кварка дается формулой

$$\Delta\epsilon = - \frac{i}{T} \iint d^3x d^3x' \bar{\psi}_k(x) M_{kl}(x, x') \psi_l(x'),$$

где

$$iM_{kl}(x, y) = -ig^2 \gamma^\mu (T^a)_{kn} S_{nm}(x, y) \gamma^\nu (T^b)_{ml} D_{\mu\nu}^{ab}(x, y)$$

представляет собой однопетлевой массовый оператор. Нетрудно найти эти величины в импульсном представлении:

$$\Delta\epsilon = (2\pi)^{-2} \bar{u}_k(p) iM_{kl}(p) u_l(p),$$

$$\begin{aligned} iM_{kl}(p) &= ig^2 \gamma^\mu (T^a)_{kn} \times \\ &\times \int d^3k S_{nm}(p-k) \gamma^\nu (T^b)_{ml} D_{\mu\nu}^{ab}(k). \end{aligned}$$

Таким образом, массовый оператор примет вид

$$\begin{aligned} iM(p) &= ig^2 \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{|\theta|} \left[-b_1 \theta + \frac{5}{9} \left(\frac{2}{\theta} gA^\mu + \frac{1}{2} \gamma^\mu \right) p_\mu - \right. \\ &\left. - gA^\mu \gamma^\nu (b_2 g_{\mu\nu} - b_3 \theta^{-2} p_\mu p_\nu) \right], \end{aligned}$$

где b_i ($i = 1, 2, 3$) — постоянные коэффициенты:

$$b_1 = \frac{5}{6} - \frac{i}{12}(3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}), \quad b_2 = \frac{10}{9} + \frac{i}{9}(8\sqrt{3} + 9\sqrt{2}),$$

$$b_3 = \frac{4}{45} - \frac{4\sqrt{3}i}{15}.$$

Усредняя массовый оператор по состоянию (3), получаем выражение для $\Delta\varepsilon$:

$$\Delta\varepsilon = \frac{5\sqrt{2}}{72} ig^2 |\theta|^{-1} \left(p_0 - \kappa \sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2} \right) \equiv 0.$$

Следует подчеркнуть, что этот результат справедлив для любых ненулевых значений импульса

$\mathbf{p} = (p^1, p^2)$. Таким образом, в случае $m = \theta/4$ фермионы остаются безмассовыми и в однопетлевом приближении.

Литература

1. Deser S., Jackiw R., Templeton S. // Ann. of Phys. (N. Y.). 1982. **140**. P. 372; Schönfeld N. // Nucl. Phys. 1981. **V185**. P. 157.
2. Жуковский В.Ч., Песков Н.А. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. № 2. С. 60 (Moscow University Phys. Bull. 1999. No. 2).

Поступила в редакцию
03.11.99