**Литература**

1. *Felde A. vom, Sprosser-Prou J., Fink J.* // Phys. Rev. 1989. **B 40**. P.10181.
2. *Пайнс Д.* Элементарные возбуждения в твердых телах. М.: Мир, 1965. С. 82.
3. *Krane K.J.* // J. Phys. F. 1978. **8**. P. 2133.
4. *Sturm K.* // Z. f. Phys. B. 1976. **25**. P. 247; *Sturm K.* // Solid State Commun. 1992. **82**. P. 295.
5. *Fleszar A., Stumpf R., Eguiluz A. G.* // Phys. Rev. 1997. **B 55**. P. 2068.
6. *Власов А.А.* // ЖЭТФ. 1938. **8**. С. 291.
7. *Зырянов П.С.* // ЖЭТФ. 1953. **25**. С. 441.
8. *Климонтович Ю.Л., Силин В.П.* // ЖЭТФ. 1952. **23**. С. 151.
9. *Харрисон У.* Теория твердого тела. М.: Мир, 1972. С. 111.
10. *Капица П. Л.* // ЖЭТФ. 1951. **21**. С. 588.
11. *Алешин И.М.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 4. С. 11 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 4. P. 14).
12. *Ландау Л.Д.* // ЖЭТФ. 1946. **16**. С. 574.
13. Справочник по специальным функциям/ Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. С. 119.

Поступила в редакцию
09.04.99

УДК 519.6

# К ОБОСНОВАНИЮ МЕТОДА МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

**А. С. Леонов*), А. Г. Ягола**

(*кафедра математики*)

**Показано, что различные обоснования метода максимальной энтропии для решения линейных некорректных задач, предложенные недавно рядом авторов (1991–1993 гг.), легко получить из общих утверждений теории нелинейных некорректных задач в топологических пространствах, развитой авторами настоящей статьи в 1986–1988 гг. В результате применения этой общей теории получается и простое обоснование метода максимальной энтропии для нелинейных некорректных задач.**

**1.** Пусть $A$ — оператор (вообще говоря, нелинейный) действует из пространства $Z[a,b]$, состоящего из функций $z(s), s \in [a,b]$, в нормированное пространство $U$. Пусть, далее, $\tau$ — некоторая топология секвенциальной сходимости в пространстве $Z[a,b]$, а $D$ — некоторое заданное множество функций из $Z[a,b]$. Рассмотрим операторное уравнение на множестве $D$:

$$Az = u, \quad z = z(s) \in D, \quad u \in U. \tag{1}$$

Предположим, что множество $Z^* = \arg\inf\{\|Az - -u\|_U\colon z \in D\}$ его квазирешений на $D$ не пусто и, возможно, содержит более одного элемента. Тогда для нахождения конкретного квазирешения вариационным методом обычно используется дополнительный функционал $\Omega(z)$. С его помощью производится отбор специальных квазирешений из множества $Z^*$. Это делается путем поиска так называемых $\Omega$-оптимальных квазирешений уравнения (1), т.е. таких функций $\bar{z}(s) \in Z^*$, для которых

$$\Omega(\bar{z}) = \inf\{\Omega(z)\colon\ z \in Z^*\}. \tag{2}$$

Их множество обозначим как $\bar{Z}$. Уравнение (1) часто представляет собой некорректно поставленную задачу, в которой вместо точных данных $\{A, u\}$ заданы их приближения $\{A_h, u_\delta\}$ с точностями $\eta = \{h, \delta\}$. В этом случае требуется по набору величин $\{A_h, u_\delta, h, \delta\}$ построить устойчивое приближенное решение задачи (1), (2), т. е. такую функцию $z_\eta(s) \in D$, что $z_\eta(s) \xrightarrow{\tau} \bar{Z}$ при $\eta \to 0$. Именно специфические свойства функционала $\Omega(z)$ обеспечивают возможность нахождения подобных устойчивых приближенных решений обратной задачи (1).

**2.** Метод максимальной энтропии для решения задачи (1), (2) связан с использованием функционального пространства $Z = L_1[a,b]$, множества $D = \{z(s) \in L_1[a,b]\colon z(s) \geqslant 0\}$ и функционала $\Omega_E(z) = \int_a^b z(s)\ln z(s)ds$. Тогда задача (2) с $\Omega(z) = \Omega_E(z)$ эквивалентна максимизации функционала энтропии $E(z) = -\Omega_E(z)$ на множестве всех неотрицательных псевдорешений уравнения (1). Считается, что такие *квазирешения с максимальной энтропией* задачи (1) полезны в ряде приложений. Применительно к решению некорректных задач метод максимальной энтропии изучен в ряде работ, из которых отметим [1–3]. В этих работах предполагается, что оператор $A$ — линейный и ограниченный из $L_1[a,b]$ в гильбертово пространство $U$, причем он задан точно ($\eta = \delta$). При этом для получения приближенных решений $z_\delta(s) \in D$ используются варианты метода регуляризации А. Н. Тихонова и метода невязки [4] с $\Omega(z) = \Omega_E(z)$.

Перечислим важнейшие вспомогательные результаты, полученные в [1, 2]. *1*) Функционал $\Omega_E(z)$ — строго выпуклый на выпуклом замкнутом множестве $D$. Он непрерывен в $L_1[a,b]$. Известно (см., напр., [5]), что это обеспечивает слабую полунепрерывность снизу на $D$ функционала $\Omega_E(z)$. *2*) Непустые множества уровня этого функционала $\Omega_C = \{z \in D\colon \Omega_E(z) \leqslant C\}$ слабо замкнуты, так как они выпуклы и замкнуты в $L_1[a,b]$. *3*) Непустые множества $\Omega_C$ слабо компактны в $L_1[a,b]$. Этот

*) МИФИ.

полезный результат, полученный в [1, 2], вытекает из совместного использования критериев Валле Пуссена и Данфорда–Петтиса (см. [6, 7]). *4*) Для всякой последовательности $\{z_n(s)\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ из слабой сходимости $z_n \rightharpoonup \bar{z}$ и сходимости по функционалу $\Omega_E(z_n) \to \Omega_E(\bar{z})$ следует сильная сходимость $z_n \to \bar{z}$ при $n \to \infty$. Этот важный результат впервые получен в [1].

В работах [1–3], основываясь на этих результатах и на линейности ограниченного оператора $A$, авторы по-разному доказывают, что: *а*) (квази)решение $\bar{z}(s)$ с максимальной энтропией существует и единственно; *б*) экстремаль функционала Тихонова существует и единственна при каждом значении параметра регуляризации; *в*) приближенное решение $z_\delta = \arg\inf\{\Omega_E(z)\colon \|Az-u_\delta\|_U \leqslant \delta\}$, полученное по методу невязки, существует и единственно при каждом $\delta \geqslant 0$; *г*) приближенные решения $z_\delta(s)$, полученные по методу А. Н. Тихонова или по методу невязки, сходятся к $\bar{z}(s)$ при $\delta \to 0$ слабо и по норме пространства $L_1[a,b]$.

С нашей точки зрения, утверждения *а–г* непосредственно вытекают из общих положений теории нелинейных некорректных задач в топологических пространствах, развитой в [8–10]. Более того, утверждения, аналогичные *а–г*, следуют из этой теории и в случае нелинейного оператора $A$, заданного с ошибкой. Эти утверждения оказываются верными не только для метода регуляризации Тихонова и метода невязки, но и для многих других методов решения некорректных задач. Покажем это.

**3.** Пусть $\tau$ — топология слабой (секвенциальной) сходимости в $L_1[a,b]$. Из отмеченных свойств *1–3* функционала $\Omega_E(z)$ вытекает, что: *1°*) функционал $\Omega_E(z)$ $\tau$-секвенциально полунепрерывен снизу на $D$; *2°*) множества $\Omega_C$ $\tau$-секвенциально компактны. Будем считать в дальнейшем, что функционалы невязок $\Phi(z) = \|Az-u\|_U$, $\Phi_\eta(z) = \|A_h z - u_\delta\|_U$ слабо полунепрерывны снизу на $D$. Это выполнено, например, для операторов $A$, $A_h$, слабо непрерывных из $L_1[a,b]$ в банахово пространство $U$, и в частности, для линейных операторов. Другие примеры можно найти в работе [10]. Тогда выполнено условие: *3°*) функционалы $\Phi(z)$, $\Phi_\eta(z)$ $\tau$-секвенциально полунепрерывны снизу на $D$. Но именно условия *1°–3°*, согласно [8] и [10, теорема 1.4.1], гарантируют существование $\Omega_E$-оптимальных квазирешений уравнения (1) на множестве $D$ (т. е. квазирешений с максимальной энтропией). Гарантируется также существование экстремалей тихоновского функционала [8], [10, теорема 1.4.2] и приближенных решений, полученных по обобщенному методу невязки с $\Omega(z) = \Omega_E(z)$ (см. [8], [10, теорема 2.5.1]. Поэтому аналоги утверждений *а–в* верны и для общего случая нелинейных задач (1) с возмущенными данными $\{A_h, u_\delta\}$. Кроме того, в частном случае линейных операторов $A$, $A_h$ из строгой выпуклости функционала $\Omega_E$ вытекает единственность $\Omega_E$-оптимального квазирешения $\bar{z}(s)$ и тихоновской экстремали на выпуклом множестве $D$ [5, с. 27], [10]. Отсюда следуют и утверждения *а*, *б*, доказанные в работах [1, 2].

В работах [8, 10] установлена общая теорема сходимости для нелинейной задачи (1), (2).

Теорема 1. *Предположим, что для функционалов* $\Omega(z)$, $\Phi(z)$ *и* $\Phi_\eta(z)$ *выполнены условия 1°–3°. Если при этом для семейства* $\{z_\eta(s)\} \subset D$ *выполнены условия*

$$\limsup_{\eta\to 0}\ \Omega(z_\eta) \leqslant \Omega(\bar{z}), \tag{3}$$

$$\lim_{\eta\to 0} \|Az_\eta - u\|_U = \|A\bar{z} - u\|_U\,, \tag{4}$$

*то* $z_\eta(s) \xrightarrow{\tau} \bar{Z}$ *и* $\Omega(z_\eta) \to \Omega(\bar{z})$ *при* $\eta \to 0$.

Применительно к методу максимальной энтропии с $\Omega(z) = \Omega_E(z)$ это означает, что выполнение условий теоремы влечет слабую (секвенциальную) сходимость функций $z_\eta(s)$ к $\bar{Z}$, а также сходимость по энтропии $\Omega_E(z_\eta) \to \Omega_E(\bar{z})$. Тогда сильная сходимость приближений $z_\eta(s)$ к $\bar{Z}$ в $L_1[a,b]$ получается из отмеченного выше вспомогательного результата *4* работы [1] для общего случая нелинейных задач (1) с возмущенными данными $\{A_h, u_\delta\}$, а не только для случая линейного точно заданного оператора. Это доказывает, что для нелинейных задач (1) верна

Теорема 2. *Пусть функционалы* $\Phi(z)$ *и* $\Phi_\eta(z)$ *обладают свойством 3°. Тогда всякий метод приближенного решения задачи* (1), (2), *обеспечивающий для своих приближений* $z_\eta(s)$ *выполнение условий* (3), (4) *с* $\Omega(z) = \Omega_E(z)$, *гарантирует сильную сходимость этих приближений в* $L_1[a,b]$ *к квазирешениям с максимальной энтропией при* $\eta \to 0$.

В заключение заметим, что выполнение требований (3), (4) теоремы 1 (в том числе и при $\Omega(z) = \Omega_E(z)$) обеспечивают многие методы решения линейных и нелинейных некорректных задач. В частности, эти соотношения будут выполняться для приближенных решений, полученных по методу регуляризации А. Н. Тихонова с выбором параметра по обобщенным принципам невязки, сглаживающего функционала и квазирешений (см. [8, 10]), а также для таких вариационных регуляризующих алгоритмов, как обобщенный метод невязки [8, 10] и обобщенный метод квазирешений [11]. Для вариантов всех этих методов, использующих функционал $\Omega(z) = \Omega_E(z)$, в силу теоремы 2 справедлива сильная сходимость в $L_1[a,b]$ приближенных решений к квазирешениям с максимальной энтропией.

Работа выполнена при поддержке программы «Университеты России — фундаментальные исследования» (грант 4-5220) и РФФИ (грант 99-01-00447).

**Литература**

1. *Amato U., Hughes W.* // Inverse Problems. 1991. **7**. P. 793.
2. *Eggermont P.P.B.* // SIAM J. Math. Anal. 1993. **24**, No 6. P. 1557.
3. *Engl H.W., Landl G.* // SIAM J. Numer. Anal. 1993. **30**. P. 1509.
4. *Тихонов А.Н, Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
5. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
6. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969.

7. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
8. *Леонов А.С.* // Матем. сб. 1986. **129**, № 2. С. 218.
9. *Леонов А.С.* // Сиб. матем. журн. 1988. **19**, № 6. С. 85.
10. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
11. *Леонов А.С.* // ЖВМ и МФ. 1996. **36**. С. 35.


Поступила в редакцию 14.04.99

УДК 517.95; 514.752.4

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРАМИ ИЗ $su(1,1)$ И $su(2)$

**А. Ю. Колесник**

(*кафедра математики*)

**Доказывается необходимое и достаточное условие кинематической интегрируемости уравнений с операторами, принадлежащими $su(1,1)$ и $su(2)$ алгебрам Ли. Предлагаемый критерий связан с дифференциально-геометрическим рассмотрением соответствующих классов кинематически интегрируемых уравнений и базируется на $G$-представлении дифференциальных уравнений с частными производными.**

### Понятие $G$-класса

Пусть на гладком двумерном многообразии задана метрика

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \quad (x^1 = x, \quad x^2 = t),$$

коэффициенты которой представимы в следующем виде: $g_{ij} = g_{ij}(u, u_x, u_t, u_{xx}, \ldots; x, t) \equiv g_{ij}[u]$, где $u(x,t)$ — неизвестная функция. Если при этом задать гауссову кривизну $K(x,t)$, то уравнение Гаусса (приведенное, напр., в [1]) будет представлять собой некоторое, вообще говоря, нелинейное дифференциальное уравнение относительно функции $u(x,t)$:

$$f[u(x,t)] = 0. \tag{1}$$

В этом случае будем называть $G$-представлением уравнения (1) соответствующий метрический тензор $g_{ij} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$. Уравнения, допускающие $G$-представление, будем называть принадлежащими $G$-классу. В случае гауссовой кривизны $K \equiv -1$ будем говорить о $\Lambda^2$-представлении ($\Lambda^2$-классе).

Понятие $\Lambda^2$-класса, введенное сравнительно недавно Э. Г. Позняком и А. Г. Поповым [2, 3], явилось, по сути, связующим звеном между нелинейными уравнениями и дифференциальной геометрией двумерных гладких многообразий.

В дальнейшем $G$-представление, соответствующее постоянной ненулевой гауссовой кривизне, будем обозначать как $G\{f[u]=0\}$, $K \equiv \text{const} \neq 0$.

### Представление нулевой кривизны

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \psi_x = U\psi, \\ \psi_t = V\psi, \end{cases}$$

где $U$ и $V$ — $(2 \times 2)$-матричные операторы, а $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ — 2-мерная вектор-функция.

Условие разрешимости данной системы получается путем перекрестного дифференцирования и имеет вид

$$U_t - V_x + [U, V] = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) называется уравнением представления нулевой кривизны. Если операторы $U$ и $V$ аналитически зависят от некоторого параметра $\xi$, то уравнения, представимые в виде (2), называются кинематически интегрируемыми уравнениями [4].

### Построение операторов представления нулевой кривизны по заданному $G\{f[u]=0\}$, $K \equiv \text{const} \neq 0$-представлению

Пусть задано $G\{f[u]=0\}$, $K \equiv \text{const} \neq 0$-представление некоторого дифференциального уравнения:

$$f[u] = 0. \tag{3}$$

В работе [5] доказана приводимая ниже теорема, связывающая кинематическую интегрируемость [4] с принадлежностью уравнений $G$-классу и позволяющая построить спектрально-эволюционные операторы $U$ и $V$ по $G$-представлению $K \equiv \text{const} \neq 0$ уравнения (3) таким образом, чтобы уравнение представления нулевой кривизны для $U$ и $V$ совпадало с соответствующим уравнением Гаусса.

Теорема 1. *Пусть задано $G$-представление уравнения (3), т. е. задан соответствующий метрический тензор $g_{ij}[u]$, причем гауссова кривизна $K \equiv \text{const} \neq 0$.*

*Тогда*

1. *Операторы*

$$U = \begin{bmatrix} \frac{i}{2}\tilde{a} & \frac{1}{2}\sqrt{-K}\sqrt{E}\exp(i\theta^+) \\ \frac{1}{2}\sqrt{-K}\sqrt{E}\exp(-i\theta^+) & -\frac{i}{2}\tilde{a} \end{bmatrix}$$