

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 534

О СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

П. В. Елютин

(кафедра квантовой радиофизики)

Для автономных систем общего вида исследована относительная распространенность неподвижных точек различных классов на фазовой плоскости. Показано, что чаще всего встречаются седла, реже фокусы, а узлы встречаются еще реже.

Для конечномерных динамических систем, заданных системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(\{x_i\}), \quad 1 \leq i \leq K, \quad (1)$$

изучение свойств положений равновесия — неподвижных точек, заданных соотношениями $F(\{x_i\}) = 0$, — составляет первый и важнейший этап качественного исследования.

Неподвижные точки классифицируются по величинам и знакам действительных и мнимых частей характеристических показателей системы динамических уравнений (1), линеаризованной вблизи положения равновесия. Для систем на фазовой плоскости ($K = 2$) выделяются следующие классы неподвижных точек: центр ($\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 0$, $\operatorname{Im} \lambda_{1,2} \neq 0$), фокус ($\operatorname{Re} \lambda_{1,2} \neq 0$, $\operatorname{Im} \lambda_{1,2} \neq 0$), седло ($\operatorname{Re} \lambda_{1,2} \neq 0$, $\operatorname{Im} \lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_1 \lambda_2 < 0$) и узел ($\operatorname{Re} \lambda_{1,2} \neq 0$, $\operatorname{Im} \lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_1 \lambda_2 > 0$) [1, с. 19–24].

В настоящей заметке исследуется относительная распространенность точек этих классов в динамических системах общего вида.

Линеаризованная вблизи неподвижной точки система уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy. \quad (2)$$

Выбором масштаба времени можно обеспечить выполнение условия

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1. \quad (3)$$

Таким образом, пространство неподвижных точек отображается на поверхность четырехмерной сферы единичного радиуса. Меры областей этой поверхности, соответствующие различным классам точек, и определяют их распространенность. Аналогичный метод метризации использовал Кац при оценке среднего числа вещественных корней полинома заданной степени [2, с. 18–24].

Точки типа «центр» являются негрубыми (при малом изменении параметров общего вида превраща-

ются в точки других классов) и имеют нулевую меру. Фокусам соответствует область, заданная условием

$$(a - d)^2 + 4bc < 0. \quad (4)$$

Седлам соответствует область, заданная условием

$$(a - d)^2 + 4bc > 0, \quad ad - bc < 0. \quad (5)$$

Остальная часть поверхности гиперсферы соответствует узлам.

Вычисление объемов областей (4) и (5) на поверхности гиперсферы (3) проводилось численным интегрированием с помощью метода Ромберга при четырех различных положениях осей системы координат. Найденные значения вероятностей фокусов (P_F), седел (P_S) и узлов (P_N) таковы:

$$P_F = 0,2920(6), \quad P_S = 0,5010(14), \quad P_N = 0,2070(20). \quad (6)$$

Цифры в скобках указывают погрешность в единицах последнего десятичного разряда. Таким образом, для систем общего вида наиболее вероятным типом неподвижной точки является седло, менее вероятен фокус, наименее распространены узлы. Частоты устойчивых и неустойчивых точек среди фокусов и узлов равны (что очевидно из симметрии).

Изложенный подход может быть обобщен на динамические системы с фазовым пространством размерностей $K > 2$. Однако быстрый рост размерности гиперсферы D с увеличением K ($D = K^2 - 1$) и усложнение вида условий для областей, соответствующих неподвижным точкам разных типов, делает соответствующие численные интегрирования весьма трудными.

Литература

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
2. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1963.

Поступила в редакцию
18.06.99