

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 539.171

## О НЕКОТОРЫХ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ШРЁДИНГЕРА С СИНГУЛЯРНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Д. Баскаран, А. Г. Корниенко, О. С. Павлова, А. Р. Френкин

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Получены решения в виде уединенных волн некоторых одномерных уравнений типа Шрёдингера с нелинейностями, имеющими полюсную особенность. Рассмотрены эффективные потенциалы для соответствующих дифференциальных уравнений и изучена структура решений в фазовой плоскости. Исследована зависимость сепаратрисных решений таких уравнений от параметров задачи. Впервые приведены примеры аналитических решений нелинейных уравнений данного типа.

Нелинейные уравнения типа Шрёдингера (НУШ) в настоящее время используются для описания различных физических систем. Такие уравнения, например, описывают распространение волновых пакетов в диспергирующих средах [1, 2], поведение неидеального бозе-газа со слабым взаимодействием между частицами [3], используются при исследовании плазменных колебаний [4] и т. д. К сожалению, уравнение типа Шрёдингера с произвольной нелинейностью не может быть решено в аналитическом виде известными методами, например методом обратной задачи квантовой теории рассеяния, который известен лишь для кубического НУШ [5]. Однако в связи с появлением в последнее время новых физических моделей, в которых используются полиномиальные потенциалы степени выше традиционной четвертой, а также потенциалы, содержащие логарифмические множители, возникает необходимость нахождения хотя бы частных решений НУШ.

Особенно интересны частные решения НУШ, имеющие вид нерасплывающихся волновых пакетов (уединенных волн). Эти важные для физических приложений решения удобнее всего получать с помощью использованного в статьях [6–9] метода квадратур. В работах [6–9] проведена классификация таких решений (ранее в статьях [8, 9] их упрощенно называли особыми решениями НУШ) и исследован ряд НУШ, имеющих решения в виде уединенных волн типа «солитона» или «кинка» [2] с различным (степенным, экспоненциальным или гауссовским) поведением на бесконечности.

В настоящей работе мы исследуем некоторые НУШ с сингулярными нелинейностями, частные решения которых, имеющие вид нерасплывающихся волновых пакетов, могут быть использованы в физике полимеров [10] или в теории фазовых переходов.

Следуя работам [6–9], рассмотрим НУШ вида

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + F(|\Psi|) \Psi \quad (1)$$

с нелинейностями  $F = F(|\Psi|)$ , имеющими полюсную особенность при  $|\Psi| \rightarrow 0$  и экспоненциально

убывающими или логарифмически возрастающими (по модулю) при  $|\Psi| \rightarrow \infty$ . Исследуем частные решения таких НУШ, соответствующие уединенным волнам (нерасплывающимся волновым пакетам), которые будем искать в виде

$$\Psi(x, t) = y(z) e^{i(pz + \omega t)}, \quad (2)$$

где  $p = v/2$ ,  $v$  — скорость пакета,  $z = x - vt$  — запаздывающая координата,  $\omega$  — несущая частота.

В этом случае действительная функция (огibaющая)  $y = y(z)$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) второго порядка

$$y_{zz} + E_0 y - F(|y|) y = 0, \quad (3)$$

которое можно записать в виде

$$y_{zz} = - \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (4)$$

где

$$U(y) = U(|y|, E_0) = -2 \int_0^{|y|} F(|y'|) y' dy' + E_0 y^2 \quad (5)$$

— эффективный потенциал ОДУ, зависящий от комбинации характеристик пакета

$$E_0 = p^2 - \omega. \quad (6)$$

Специально отметим, что в нашем подходе, связанном с использованием метода квадратур, частные решения ОДУ (3), соответствующие волновым пакетам вида (2), определяются только двумя величинами: основным параметром задачи  $E_0$  (только он входит в эффективный потенциал (5)) и значением постоянной интегрирования  $E$ , сходной с полной энергией материальной точки в задачах классической механики [11].

Решение ОДУ (4) в этом подходе может быть представлено в виде квадратуры:

$$z - z_0 = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{E - U(y)}}, \quad (7)$$

где  $z_0$  — некоторая постоянная интегрирования. Обращение (7) дает решение ОДУ  $y = y(z, E, E_0)$ , что определяет решение НУШ (1) вида (2).

В работе [8] было показано, что асимптотическое поведение сепаратрисных решений НУШ при  $|z - z_0| \rightarrow \infty$  определяется значением первой  $U'(y)$  и второй  $U''(y)$  производных эффективного потенциала (5) в особых точках. Обычно в литературе рассматриваются такие потенциалы  $U(y)$ , для которых в особых точках выполняется условие

$$U'(y) = 0, \quad |U''(y)| < \infty. \quad (8)$$

Однако для физических приложений весьма интересны и такие НУШ, для которых условие (8) в особых точках не выполняется. Такие уравнения, возможно, могут быть использованы в модельных физических задачах с резким скачком характеристик физической системы, например в теории фазовых переходов.

В качестве примера уравнений, имеющих ограниченные (физические) решения в виде нерасплывающихся волновых пакетов, рассмотрим НУШ вида

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2\beta a (2e^{-2|\Psi|/a} - e^{-|\Psi|/a}) \frac{\Psi}{|\Psi|}, \quad (9)$$

$$a > 0, \quad \beta > 0,$$

которому соответствует ОДУ (4) с эффективным потенциалом

$$U(y) = 4\beta a^2 \{e^{-2|y|/a} - e^{-|y|/a}\} + E_0 y^2. \quad (10)$$

Этот потенциал не удовлетворяет традиционному условию (8) в особой точке  $y = 0$ :

$$U(y) = 0, \quad U'(y) = -4\beta a \frac{y}{|y|} \neq 0, \quad U''(y) = -8\beta a \delta(y).$$

Такое поведение потенциала определяет большую (чем при выполнении условия (8)) «скорость» движения изображающей точки [7] при подходе к точке  $y = 0$ , что приводит к неэкспоненциальной зависимости сепаратрисного ( $E = 0$ ) решения НУШ вида (2) от запаздывающей координаты. При выборе параметра задачи  $E_0 = 0$  уравнение (9) имеет решение вида

$$\Psi(x, t) = \pm a \ln |1 + \beta(z - z_0)^2| \exp[i(px - p^2 t)], \quad (11)$$

которое из-за возрастания при  $|z - z_0| \rightarrow \infty$  не является физическим. Физическим решениям соответствуют лишь такие нерасплывающиеся волновые пакеты, для которых параметр задачи  $E_0 > 0$ . Только подобные сепаратрисные решения (хотя они и не представимы в аналитическом виде) являются ограниченными и могут соответствовать реальному поведению физической системы. В этом случае при  $E \leq 0$  огибающая волнового пакета нелинейно осциллирует относительно некоторого равновесного положения.

Потенциал (10) и фазовые портреты сепаратрисных ( $E = 0$ ) решений НУШ (9) приведены на рис. 1:

при  $E_0 > 0$  — сплошными линиями, а при  $E_0 = 0$  — пунктирными.

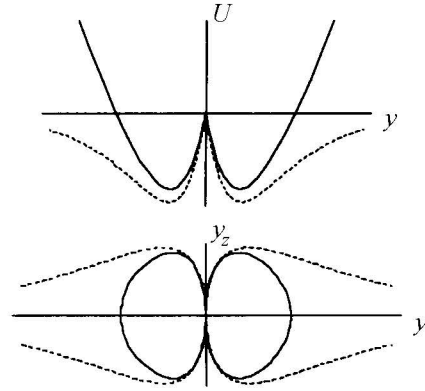


Рис. 1

Заметим, что для  $E_0 > 0$  при исследовании поведения сепаратрисного ( $E = 0$ ) решения НУШ (9) в случае  $|\Psi| \rightarrow 0$  эффективный потенциал (10) удобно моделировать потенциалом

$$U(y) = -B|y| + E_0 y^2, \quad (12)$$

которому соответствует модельное НУШ

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{B}{2} \frac{\Psi}{|\Psi|}, \quad (13)$$

линейное по фазе  $\exp[i(px - p^2 t)]$ . Это уравнение при  $E = 0$  имеет точное решение вида

$$\Psi(x, t) = \pm \frac{B}{2E_0} \left\{ 1 - \cos \left[ \sqrt{E_0}(z - z_0) \right] \right\} \exp[i(px - \mathcal{E}t)], \quad (14)$$

где  $\mathcal{E} = p^2 + E_0$ , что соответствует линейным огибающим огибающей пакета. При этом изображающая точка не переходит из области  $y > 0$  в область  $y < 0$  и наоборот. Заметим, что потенциал (12) и уравнение (13) получаются предельным переходом из (10) и (9) при  $a \rightarrow \infty$ ,  $4\beta a \rightarrow B$ .

Потенциал (12) и фазовый портрет сепаратрисного решения (14) изображены на рис. 2.

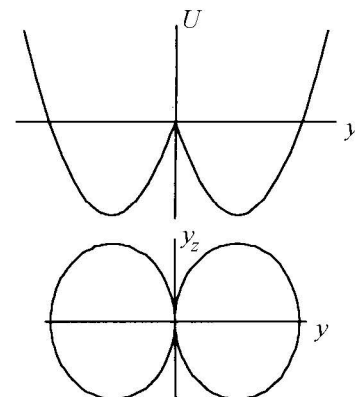


Рис. 2

Рассмотрим далее качественно сходное с НУШ (9) нелинейное уравнение вида

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{B}{2} \{ \gamma |\Psi| - 1 \} \exp(-\gamma |\Psi|) \frac{\Psi}{|\Psi|}, \quad (15)$$

$$B > 0, \quad \gamma > 0,$$

которому соответствует эффективный потенциал

$$U(y) = -B|y| \exp(-\gamma|y|) + E_0 y^2, \quad (16)$$

так же, как и потенциал (10), при  $y = 0$  имеющий скачок первой производной  $U'(y)$  и  $\delta$ -образное поведение второй производной:  $U''(y) = -2B \delta(y)$ . Хотя точные аналитические сепаратрисные ( $E = 0$ ) решения НУШ (15) и в этом случае отсутствуют, поведение таких решений качественно не отличается от сепаратрисных решений НУШ (9). Заметим, что огибающие волновых пакетов для НУШ (9) и (15) могут быть получены численным интегрированием формулы (7).

Специально отметим, что физические решения вида (2) уравнений (9), (15) существуют лишь при  $E_0 > 0$ . Заметим также, что полюсные особенности  $|\Psi|^{-1}$  в уравнениях (9) и (15) принципиально меняют поведение решений: при отсутствии таких особенностей сепаратрисные ( $E = 0$ ) решения были бы солитонными, а не осциллирующими.

Отметим, что уравнение (15) является частным случаем НУШ вида

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{B}{2} |\Psi|^{\alpha-2} \{ \gamma |\Psi| - \alpha \} \exp(-\gamma |\Psi|) \Psi \quad (17)$$

( $\alpha \geq 1, B > 0, \gamma > 0$ ), которому соответствует эффективный потенциал

$$U(y) = -B|y|^\alpha \exp(-\gamma|y|) + E_0 y^2. \quad (18)$$

Это уравнение при значениях  $\alpha = 2$  и  $\alpha = 3$  впервые было исследовано в работе [9]. Однако случай  $\alpha = 3, B > 0, E_0 > 0$  там был представлен неточно. На рис. 3 приведены уточненные графики потенциала (18) и фазовых портретов решений НУШ вида (2) при  $\gamma \neq 0$  (сплошные линии) и  $\gamma = 0$  (пунктирные линии). В этом случае НУШ (17) при  $\gamma \neq 0$  и  $E = U_{\max}$  имеет два ограниченных сепаратрисных решения: обычное кинковое и обычное солитонное (по классификации работы [8]). Значению же  $E = 0$  соответствует колебательное решение НУШ. При  $\gamma = 0$  существует только кинковое сепаратрисное решение НУШ.

Рассмотрим еще одно, как нам кажется, чрезвычайно интересное НУШ с нелинейностью  $F = F(|\Psi|)$ , содержащей логарифмические члены и так же, как в случае уравнений (9), (15), убывающей при  $|\Psi| \rightarrow \infty$ :

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \quad (19)$$

$$+ \beta \left\{ -2 \ln \frac{|\Psi|}{a} + \gamma |\Psi| \ln \frac{|\Psi|}{a} - \frac{1}{2} \gamma |\Psi| \right\} \exp(-\gamma |\Psi|) \Psi,$$

где  $a > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ . Этому уравнению соответствует эффективный потенциал

$$U(y) = \beta y^2 \left\{ 2 \ln \frac{|y|}{a} - 1 \right\} \exp(-\gamma|y|) + E_0 y^2. \quad (20)$$

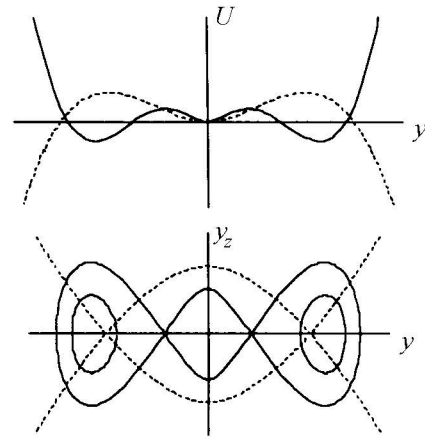


Рис. 3

При параметре задачи  $E_0 < 0$  таком, что  $U_{\max} > 0$ , имеются две сепаратрисы:  $E = 0$ , которой соответствует солитонное решение с огибающей ( $|\Psi|$ ), убывающей быстрее экспоненты при  $|z - z_0| \rightarrow \infty$  [8], и  $E = U_{\max}$ , для которой решение вида (2) является обычным кинком. При  $y = 0$  имеем:  $U(y) = 0$  и  $U'(y) = 0$ , однако вторая производная потенциала (20) логарифмически убывает при  $|y| \rightarrow 0$ , хотя и слабее  $\delta$ -образного убывания вторых производных потенциалов (10), (12), (16). Потенциал (20) принципиально отличается от потенциалов (10), (12), (16), для которых производная  $U'(y)$  имела скачок в точке  $y = 0$ , что, собственно, и приводило к осциллирующим сепаратрисным решениям НУШ (9), (13) и (15) в отличие от быстроубывающего сепаратрисного ( $E = 0$ ) решения НУШ (19) при  $|z - z_0| \rightarrow \infty$ .

Потенциал  $U(y)$  (20) и фазовые портреты сепаратрисных решений НУШ (19) изображены на рис. 4.

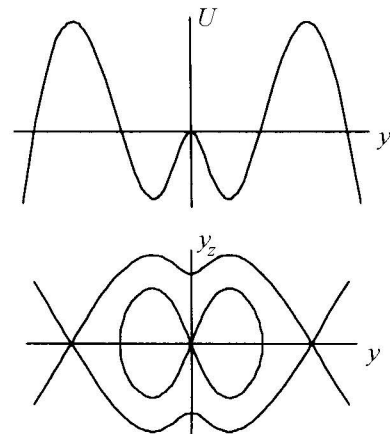


Рис. 4

При  $\gamma \rightarrow 0$  потенциал (20) принимает вид

$$U(y) = \beta |y|^2 \left\{ 2 \ln \frac{|y|}{a} - 1 \right\} + E_0 y^2, \quad (21)$$

а соответствующее ему НУШ:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - 2\beta |\Psi| \ln \frac{|\Psi|}{a}. \quad (22)$$

Это уравнение кинкового решения не имеет, при  $\gamma = 0$  остается только солитонное сепаратрисное

( $E = 0$ ) решение в виде быстроубывающего волнового пакета:

$$\Psi(x, t) = \pm a \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{E_0}{\beta} \right) - \frac{1}{2} (z - z_0)^2 \right] \times \exp[i(px - Et)]. \quad (23)$$

Потенциал (21), его производные и фазовый портрет сепаратрисного решения (23) уравнения (22) приведены на рис. 5:  $U(y)$  — сплошная линия,  $U'(y)$  — штриховая,  $U''(y)$  — пунктирная.

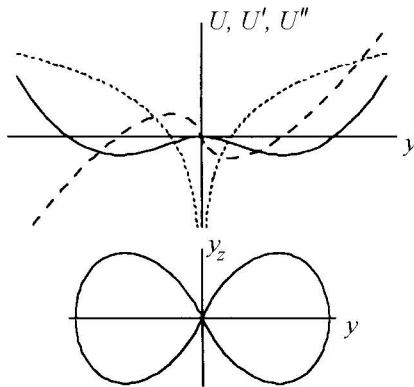


Рис. 5

В заключение еще раз отметим, что приведенные в работе нелинейные уравнения, имеющие частные решения в виде нерасплывающихся волновых пакетов, могут служить моделями описания ряда физических задач.

Авторы глубоко благодарны В. Ф. Березницкой за постоянное внимание.

#### Литература

1. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. 2-е изд. М.: Наука, 1990.
2. Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С. // УФН. 1986. 149, № 3. С. 449.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963.
4. Солитоны в действии / Под ред. К. Лонгрена и Э. Скотта. М.: Мир, 1981.
5. Захаров В.Е., Манакон С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи / Под ред. С.П. Новикова. М.: Наука, 1980.
6. Корниенко А.Г., Тернов И.М., Френкин А.Р., Чижев Г.А. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1995. № 4. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1995. No. 4. P. 1).
7. Корниенко А.Г., Френкин А.Р., Чижев Г.А. // Там же. 1997. № 5. С. 10 (Ibid. 1997. No. 5. P. 12).
8. Баринова Е.Г., Корниенко А.Г., Френкин А.Р., Чижев Г.А. // Там же. 1998. № 1. С. 12 (Ibid. 1998. No. 1. P. 14).
9. Френкин А.Р. // Там же. 1999. № 2. С. 9 (Ibid. 1999. No. 2. P. 11).
10. Жак П. де. Идеи скейлинга в физике полимеров. М.: Мир, 1982.
11. Халилов В.Р., Чижев Г.А. Динамика классических систем: Учеб. пособие. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1993.

Поступила в редакцию  
23.06.99

УДК 519:6:616

## ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ ОДНОЙ КВАЗИРАВНОВЕСНОЙ МОДЕЛИ ИММУНОЛОГИИ

В. Б. Гласко, С. В. Родионов, А. А. Володин, А. С. Соболевский

(кафедра математики)

Предложена математическая модель для описания процесса активации лейкоцитов, учитывающая глубинный источник и стационарность гистограммы. Для идентификации модели по параметрам исследована проблема единственности; разработан регуляризирующий алгоритм и проведен математический эксперимент с оценкой погрешности результата в зависимости от уровня погрешности данных наблюдений.

Разработке биологических основ и математических моделей иммунологии посвящены фундаментальные работы [1, 2]. В работе [3] впервые рассмотрена задача об идентификации модели процесса активации иммунокомпетентных клеток с показаниями проточного цитометра [4], обнаруживающего в эксперименте распределение клеток по уровню активации.

Эта задача, как и рассматриваемая в настоящей работе, открывает возможности оперативного изучения состояния иммунной системы пациента, в частности в целях профилактики заболевания. В отличие от [3], нами постулируется более содержатель-

ная модель активации клетки. Ее идентификация с показаниями прибора проводится в условиях стационарности последних, что соответствует квазиравновесному состоянию иммунной системы пациента. Выясняются вопросы математической корректности модели. Целью работы является оценка возможности прогноза заболевания с помощью математического эксперимента.

1. Пусть  $A(t)$  — число молекул на поверхности клетки в течение ее времени жизни  $t$ , а  $B(t)$  — число их в недрах клетки. Предлагаемая модель учитывает транспорт молекул на поверхность, а также их распад как на поверхности, так и внутри. Модели