

УДК 621. 517. 373

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ С ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТЬЮ ПРОСТРАНСТВА ВЛОЖЕНИЯ

Д. А. Грибков, В. В. Грибкова, Ю. И. Кузнецов

(кафедра физики колебаний)

Показано, что высшие степени свободы наблюдаемого процесса при построении его динамической модели можно учесть в классе дифференциальных уравнений третьего порядка с запаздывающим аргументом.

Введение

В большинстве работ, посвященных построению динамических модельных систем по наблюдаемым временным рядам, речь идет о процессах с ярко выраженной малоразмерной динамикой ($N = 3$) [1–4]. Однако многие реально наблюдаемые процессы (колебания в плазме, колебания электрической активности мозга, фиксируемые на электроэнцефалограмме, и т. п.) обычно обладают высокой размерностью пространства вложения, и разработанные процедуры восстановления малоразмерных динамических моделей становятся неэффективными. Попытки построения устойчивых динамических моделей для реально наблюдаемых процессов с высокой размерностью пространства вложения, как правило, заканчивались неудачей. Причины этих неудач заключаются в неверном выборе динамических переменных и уравнений модели, а также в зашумленности и нестационарности большинства реально наблюдаемых процессов.

Обычно при построении динамических уравнений, описывающих наблюдаемый процесс, в качестве независимых переменных используют переменные Такенса [5]. Однако в большинстве случаев построенная на их основе математическая модель описывает наблюдаемый процесс локально и не обладает свойством глобальной устойчивости. Это объясняется рядом причин. Во-первых, переменные Такенса не обладают достаточной локальностью и содержат избыточную информацию о процессе в каждой точке траектории, построенной в пространстве вложения. Во-вторых, указанные переменные в общем случае не являются статистически независимыми и ортогональными в смысле их скалярного произведения. Обычно наблюдается следующее противоречие: если переменные выбираются статистически независимыми, то

они не обладают локальностью, если же переменные описывают наблюдаемый процесс локально (время запаздывания мало), то они статистически зависимы. В ряде случаев в качестве динамических переменных можно использовать производные высших порядков. Однако это относится к чисто модельным процессам с высокой частотой дискретизации. К сожалению, мы не можем использовать производные высокого порядка для реальных процессов из-за влияния шумов. Следовательно, учитывая указанные требования к переменным, мы должны использовать модельные уравнения особого вида. Известно, что дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом демонстрируют широкий спектр решений [6]. Поэтому была предпринята попытка использовать эти уравнения для построения динамической модели наблюдаемого временного ряда с высокой размерностью пространства вложения.

Динамическая модель для процессов с размерностью пространства вложения больше трех

Обозначим наблюдаемый процесс, генерируемый некоторой динамической системой с размерностью $n > 3$, через $x(t)$. Соответствующий временной ряд процесса зададим как $x_k = x(t_k)$, $k = 1, \dots, N_t$. Определим N -мерный вектор \mathbf{R}_k состояния наблюдаемого процесса в момент времени t_k , задавая отсчеты временного ряда x_k через достаточно малый интервал времени τ : $\mathbf{R}_k = \mathbf{R}(x(t_k), x(t_k + \tau), \dots, x(t_k + \tau(N - 1))) = \mathbf{R}(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{Nk})$. Составим ковариационную матрицу:

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{N1} & \dots & \sigma_{NN} \end{pmatrix}$$

временного ряда x_k , где $\sigma_{ii} = \sum_{k=1}^{N_t} x_{ik}^2$, $\sigma_{ji} = \sum_{k=1}^{N_t} x_{jk}x_{ik}$. Затем из уравнения

$$(\hat{C} - \lambda_i \hat{I})\mathbf{S}_i = 0$$

найдем собственные векторы $\mathbf{S}_i = \mathbf{S}(\mu_{i1}, \dots, \mu_{iN})$, где $i = 1, \dots, m$, λ_i — i -е собственное значение, \hat{I} — единичная матрица и μ_{ij} — j -я координата i -го собственного вектора в N -мерном пространстве вложения. Выберем $m = 3$, т.е. рассмотрим только первые три собственных вектора матрицы \hat{C} . Проекция вектора \mathbf{R}_k на векторы \mathbf{S}_i дают новые переменные $\tilde{x}_{ik} = (\mathbf{R}_k, \mathbf{S}_i)$ в m -мерном пространстве. В работе [7] показано, что для $m = 3$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{1k} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{j=1}^m x_{jk}, & \tilde{x}_{2k} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_{3k} - x_{1k}), \\ \tilde{x}_{3k} &= \frac{1}{\sqrt{6}}(x_{1k} - 2x_{2k} + x_{3k}), \end{aligned} \quad (1)$$

т.е. переменные \tilde{x}_{ik} описывают динамику 3-мерного вектора состояния

$$\mathbf{r}_k = \sum_{i=1}^m \mathbf{S}_i \tilde{x}_{jk}. \quad (2)$$

Исходя из структуры переменных (1), эволюцию малоразмерного вектора (2) можно представить в виде уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = f(x, y, z, \mathbf{a}), \quad (3)$$

где f — нелинейная функция, \mathbf{a} — вектор, характеризующий коэффициенты модели. Если размерность пространства вложения процесса $x(t)$ больше трех, то нам необходимо учесть дополнительные степени свободы, которые не описываются малоразмерным вектором \mathbf{r}_k . Для этого выделим из процесса запаздывающую переменную $x_\tau = x(t - \tau_d)$ (τ_d — характерное время запаздывания), которая статистически независима от $x(t)$ и содержит дополнительную информацию о динамике процесса. Для вычисления времени запаздывания τ_d найдем минимум функции взаимной информации переменных x и x_τ (см., напр., [8]):

$$I(\tau_d) = \sum_i p_i(x, x_\tau) \log_2 \left(\frac{p_i(x, x_\tau)}{p_i(x)p(x_\tau)} \right), \quad (4)$$

где $p_i(x, x_\tau)$ — двумерная функция распределения переменных x и x_τ , $p_i(x)$ и $p_i(x_\tau)$ — независимые функции распределения тех же переменных. Мы предполагаем, что запаздывающая переменная учитывает в той или иной мере высокоразмерную динамику вектора состояния процесса, и для ее опи-

сания представим эмпирическую модель процесса в виде дифференциальных уравнений с запаздыванием. Иначе говоря, воспользуемся обобщением уравнений (3) в классе уравнений с запаздывающим аргументом. Запишем (3) в виде

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = f(x, y, z, x_\tau, \mathbf{a}). \quad (5)$$

Подгонка уравнений (5) к наблюдаемой модели и вычисление ее коэффициентов осуществляется в соответствии с методикой, разработанной нами ранее в работах [9, 10].

Рассмотрим пример построения устойчивой модели типа (5) для процесса с высокой размерностью пространства вложения. В качестве наблюдаемого процесса мы выбрали квазистационарный участок электроэнцефалограммы (ЭЭГ) человека, находящегося в состоянии покоя. Частота дискретизации временного ряда ЭЭГ равна 200 Гц. Размерность пространства вложения исследуемого процесса оказалась равной 9. В качестве нелинейной функции системы (5) был выбран полином 3-й степени от переменных x, y, z, x_τ . Для обеспечения гладкости вторых производных была использована 5-точечная

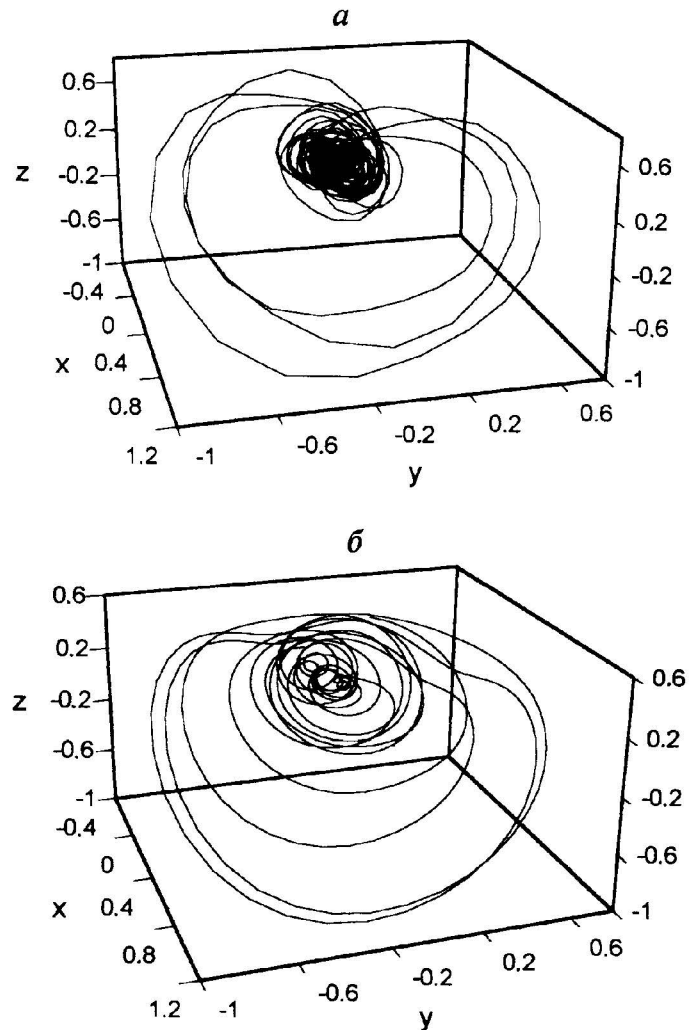


Рис. 1. Фазовые траектории, построенные в пространстве переменных x, y, z для реальной (а) и модельной (б) ЭЭГ

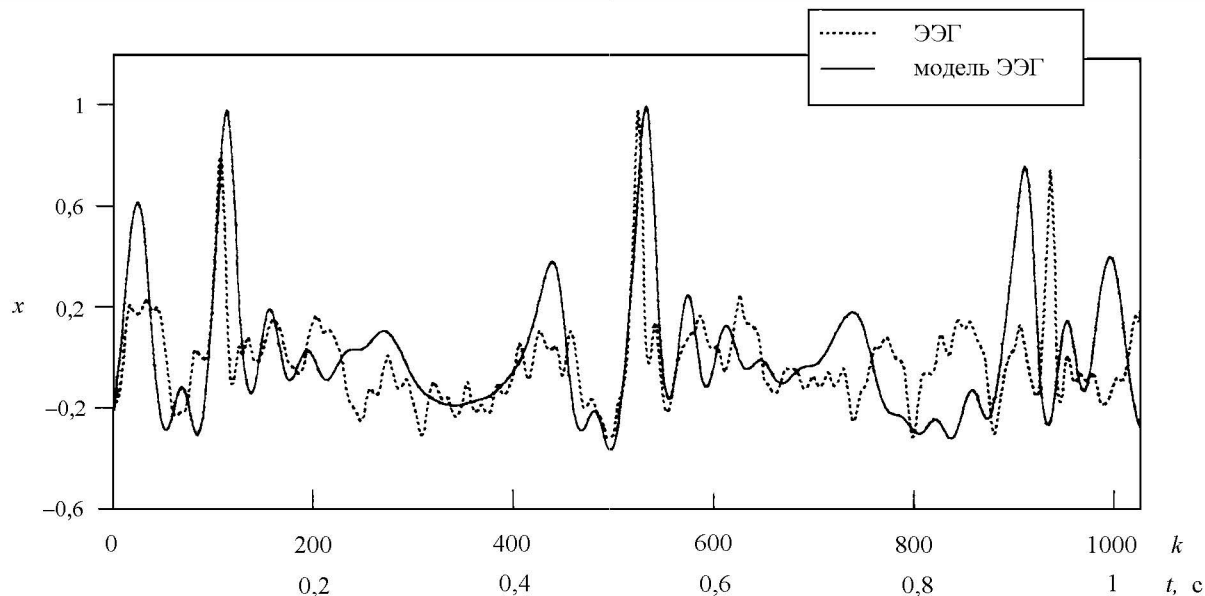


Рис. 2. Сегменты реальной и модельной ЭЭГ

локальная сплайн-аппроксимация процесса. Из выражения (4) была получена оценка времени запаздывания $\tau_d = 25$ ($\tau_d = n_d \Delta t$). В результате интегрирования уравнений (5) с $\Delta t = 0,2$ (по отношению к шагу дискретизации наблюдаемого процесса) и начальными условиями, выбранными на тестируемом участке ЭЭГ, мы получили траекторию в фазовом пространстве модельной системы, которая топологически подобна исходной траектории в пространстве переменных x, y, z (рис. 1, а, б). Сходство наблюдается и при сравнении временного ряда модельной системы с реальной ЭЭГ (рис. 2). В то же время размерность пространства вложения модельного временного ряда оказалась равной 6, т.е. меньше исходной, что свидетельствует либо о влиянии шума, либо о том, что уравнения (5) не в полной мере описывают динамику высокоразмерного вектора состояния наблюдаемого процесса. Независимо от этого эмпирические модельные уравнения для отдельных участков ЭЭГ могут служить динамическими фильтрами для классификации и диагностики эмоциональных и патологических состояний, скрытых в ЭЭГ и не выявляемых малоразмерными моделями процессов.

Литература

1. Voss H.U., Schwache A., Kurthz J., Mitschke F. // Phys. Lett. 1999. **A256**. P. 47.
2. Lainscsek C.S., Shierer F., Kadtko J.B. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1998. **8**, No. 5. P. 899.
3. Mendes E.M., Billings S.A. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1997. **7**, No. 11. P. 2593.
4. Янсон Н.Б., Павлов А.Н., Балапов А.Г., Анищенко В.С. // Письма в ЖТФ. 1996. **22**, № 16. С. 57.
5. Takens F. Detecting Strange Attractor in Turbulence: Lecture Notes in Math. 898. Berlin: Springer-Verlag, 1981.
6. Diekmann O., Gils S.A. van, Verduyn Lunel S.M., Walther H.O. Delay Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1995.
7. Грибков Д.А. // Радиотехн. и электроника. 1995. **40**. С. 1112.
8. Abarbanel H.D. // Analysis of Observed Chaotic Data. Berlin: Springer-Verlag, 1996. P. 28.
9. Грибков Д.А., Грибкова В.В., Кравцов Ю.И. и др. // ЖТФ. 1994. **64**, № 3. С. 1.
10. Грибков Д.А., Грибкова В.В., Кравцов Ю.И. и др. // Радиотехн. и электроника. 1994. **39**, № 2. С. 269.

Поступила в редакцию
13.10.99