

$$\mu_q = \frac{2\pi}{\sqrt{3(\ln(4\pi\Lambda^2/\mu_g^2) + 8\pi^2/2 + 1/2 - \gamma)}} \mu_g,$$

где γ — постоянная Эйлера. Подставляя (6) в (5) и рассматривая полученное соотношение как квадратное уравнение относительно τ , потребуем неотрицательности его дискриминанта. В результате получим условия на параметр μ_g , имеющие следующий вид:

$$A \geq -\frac{3 + \sqrt{5}}{2} B, \tag{7}$$

$$A \leq -\frac{3 - \sqrt{5}}{2} B, \tag{8}$$

где

$$A = \frac{56\pi^3}{s_0^2} \alpha \frac{\mu_g^2}{(\ln(4\pi\Lambda^2/\mu_g^2) + 8\pi^2/2 + 1/2 - \gamma)} - \frac{R}{(32/\pi^2) \ln(\mu_g/\Lambda) [\ln(\mu_g/\Lambda) + 1/6] \mu_g^{10}},$$

$$B = \frac{2\pi^2}{3s_0} \frac{32}{\pi^2} \ln(\mu_g/\Lambda) (\ln(\mu_g/\Lambda) + 1/6) - \frac{R}{(32/\pi^2) \ln(\mu_g/\Lambda) (\ln(\mu_g/\Lambda) + 1/6) \mu_g^8}.$$

Неравенство (8) приводит к нефизическим отрицательным значениям μ_g , а неравенство (7) дает оценку снизу. Оценку сверху получим из неравенства для отношения глюонного и четырехкваркового конденсатов, полученное в [3]:

$$-1,0 \text{ ГэВ}^2 \leq -\frac{27 \langle (\alpha/\pi) GG \rangle}{896\pi\alpha \langle \bar{q}q \rangle^2} \leq 0.$$

Подставляя в это соотношение (6), получаем оценку сверху для μ_q . Используя связь μ_g и μ_q , оконча-

тельно получаем следующую оценку для массы конститuentного кварка:

$$287 \text{ МэВ} \leq \mu_q \leq 963 \text{ МэВ}.$$

Полученный результат хорошо согласуется с другими имеющимися оценками [1, 8, 9]. В работе [6] была предложена модель, объединяющая пертурбативную КХД с низкоэнергетической феноменологией. Гамильтониан модели был получен в результате итерационной процедуры, основанной на ренормгрупповом анализе. Однако, как отмечают сами авторы, величина массы конститuentного кварка в их подходе оказывается заниженной ($\mu_q = 100$ МэВ). В настоящей работе показано, что учет ренормгруппы в рамках конечно-энергетических правил сумм не приводит к заниженным значениям массы конститuentного кварка.

Литература

1. *Shifman M.A., Vainstein A.I., Zakharov V.I.* // Nucl. Phys. 1979. **B147**. P. 385; 448; 519.
2. *Меуцьяков Д.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1991. № 6. С. 44 (Moscow University Phys. Bull. 1991. No. 6. P. 42).
3. *Meshcheryakov D.V.* // Z. f. Phys. 1992. **C55**. P. 643.
4. *Arbuzov B.A., Boos E.E., Turashvili K.Sh.* // Z. f. Phys. 1986. **C30**. P. 287.
5. *Kiselev V.V.* // Препринт ИФВЭ №92-51. Протвино, 1992.
6. *Szczepaniak A.P., Swanson E.S.* // Phys. Rev. 1997. **D55**. P. 1578.
7. *Becchi C., Narison S., Rafael E. de, Yndurain F.J.* // Z. f. Phys. 1981. **C8**. P. 335.
8. *Wilson K.G., Without T.S., Harindranath A. et al.* // Phys. Rev. 1994. **D49**. P. 6720.
9. *Jungnickel D.-U., Wetterich C.* // Phys. Rev. 1996. **D53**. P. 5142.

Поступила в редакцию 19.05.99

УДК 534. 01

О БИСТАБИЛЬНОСТИ СИНХРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ОСЦИЛЛЯТОРЕ ВАН ДЕР ПОЛЯ

П. В. Елютин

(кафедра квантовой радиофизики)

Для синхронных колебаний осциллятора Ван дер Поля под действием гармонической силы исследована (аналитически и численно) область бистабильности, в которой при заданном значении параметров внешней силы могут существовать два устойчивых периодических решения с различными параметрами.

Движение осциллятора Ван дер Поля под действием гармонической внешней силы описывается в безразмерных переменных уравнением

$$\ddot{x} - \alpha \dot{x}(1 - x^2) + x = F \cos \omega t.$$

Задача об устойчивости синхронных (имеющих частоту внешнего поля ω) колебаний в этой модели

при малых значениях параметра ($\alpha \ll 1$) была решена Андроновым и Виттом еще в 1930 г. [1, 2]. В своей пионерской работе эти авторы отметили наличие у уравнения (1) области бистабильности, в которой «существует одновременно два устойчивых периодических решения» [2, с. 64], но отказались от ее рассмотрения.

Хотя и сама задача, и предложенный в работе [1] метод ее решения, основанный на уравнениях для медленно меняющихся амплитуд, вошли в стандарт учебного курса теории колебаний [3, 4], утверждение о бистабильности синхронных колебаний, которое еще можно отыскать в старых книгах [5], осталось без внимания и со временем было забыто настолько, что стало отрицаться [6]. Цель настоящей заметки — заполнить оставленный Андроном и Виттом пробел.

Переход к медленным переменным хорошо известен [1–6], поэтому перейдем сразу к интересующим нас уравнениям. Значения амплитуды синхронных колебаний при заданных значениях параметров $\alpha \ll 1$, F и ω определяются точками на резонансной кривой, заданной уравнением

$$\left(1 - \frac{1}{4}z\right)^2 z + 4\Delta^2 z = f^2, \quad (1)$$

где z — квадрат амплитуды колебаний, а Δ и f обозначают приведенные значения расстройки частоты и силы:

$$\Delta = \frac{\omega - 1}{\alpha}, \quad f = \frac{F}{\alpha}.$$

Устойчивыми являются колебания, которым соответствуют участки резонансной кривой, лежащие в полупространстве $z > 2$ вне эллипса, заданного уравнением

$$4\Delta^2 + \left(1 - \frac{1}{4}z\right)\left(1 - \frac{3}{4}z\right) = 0. \quad (2)$$

Поскольку уравнения (1) и (2) не изменяются при изменении знака Δ , в дальнейшем мы говорим о ветви $\Delta > 0$ без ограничения общности.

Нижней по частоте границе бистабильности соответствует пересечение резонансной кривой (1), прямой $z = 2$ и эллипса (2) в одной точке a :

$$\Delta_a = \frac{1}{4}, \quad f_a = 1.$$

При этом значении силы f внешняя граница области синхронизации определяется пересечением резонансной кривой (1) и эллипса (2) в области $z > 8/3$ и соответствует значению расстройки $\Delta_+ \approx [(223 - \sqrt{29})/3200]^{1/2} = 0,261$, превышающей Δ_c . Следовательно, точка a лежит внутри полосы синхронизации.

Верхней частотной границе бистабильности соответствует касание резонансной кривой и эллипса (2) в точке b :

$$\Delta_b = \frac{1}{\sqrt{12}} = 0,289, \quad f_b = \sqrt{\frac{32}{27}} = 1,089.$$

При этом значении силы внешняя граница области синхронизации определяется пересечением резонансной кривой (1) и прямой $z = 2$ и соответствует значению расстройки $\Delta_+ = (37/432)^{1/2} = 0,293$, превышающей Δ_b . Следовательно, точка b лежит внутри полосы синхронизации.

Наконец, третья характерная точка c соответствует значению приведенной силы f , при котором точки пересечения резонансной кривой с прямой $z = 2$ и с эллипсом (2) в области $z > 8/3$ имеют одинаковые значения Δ . Точка c лежит на границе полосы синхронизации; ее параметры можно определить численно:

$$\Delta_c = 0,279, \quad f_c = 1,061.$$

Область бистабильности на плоскости параметров (Δ, f) имеет вид криволинейного треугольника с вершинами в точках a , b и c . Вид границ области синхронизации и области бистабильности, найденный путем численного решения алгебраических уравнений, изображен на рис. 1. Область синхронизации лежит слева от показанных линий. Область бистабильности синхронных колебаний лежит внутри криволинейного треугольника abc . Из рис. 2, где приведен фрагмент резонансной кривой, видно, что в области бистабильности альтернативные синхронные движения значительно различаются по своим характеристикам. Бистабильность существует в частотном интервале $0,2707 < \Delta < 0,2717$. При заданной расстройке интервал значений приведенной силы, в котором система бистабильна, не превосходит

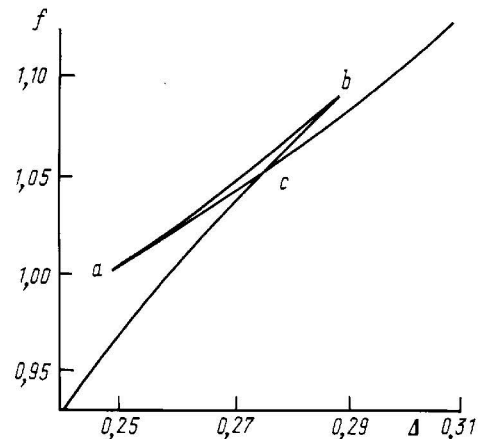


Рис. 1. Границы области синхронизации осциллятора Ван дер Поля на плоскости параметров «приведенная расстройка частоты Δ — приведенная сила f » при положительных расстройках

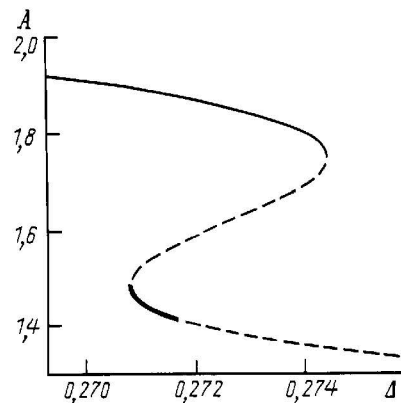


Рис. 2. Резонансная кривая зависимости амплитуды колебаний от приведенной расстройки Δ для значения приведенной силы $f = (f_a + f_b)/2 = 1,0443$. Устойчивым колебаниям соответствуют сплошные участки кривой, неустойчивым — штриховые

$3 \cdot 10^{-3}$; такая числовая малость чрезвычайно затрудняет возможность экспериментального наблюдения исследованного явления.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Учебно-научного центра «Фундаментальная оптика и спектроскопия» (в рамках программы «Интеграция») и Федеральной программы по поддержке ведущих научных школ (грант 96-15-96476).

Литература

1. *Andronow A., Witt A.* // Archiv für Elektrotechnik. 1930. XXIV. S. 99.
2. *Андронов А.А.* Собр. трудов. М.: Изд-во АН СССР, 1956.

3. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. С. 251–258.
4. *Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н.* Основы теории колебаний. 2-е изд. М.: Наука, 1988. С. 214–219.
5. *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М.: ИЛ, 1953. С. 157, 180.
6. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. С. 75–76.

Поступила в редакцию
18.06.99

УДК 530.12:517.958

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ ВИССЕРА

И. П. Денисова, А. А. Зубрило, В. Б. Тверской

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Проведено интегрирование уравнений геодезического движения для массивных и безмассовых частиц в гравитационных полях, создаваемых плоскими электромагнитной и скалярной волнами в теории гравитации Виссера. Показано, что уравнения траекторий этих частиц существенно зависят от массы гравитона.

В настоящее время в научной литературе активно обсуждается несколько вариантов биметрических теорий гравитации, использующих представления о массивном гравитоне. В таких теориях точные решения уравнений гравитационного поля содержат массу гравитона в качестве параметра. Поэтому, изучая законы движения частиц в гравитационных полях, можно оценить массу гравитона и выяснить, насколько предположение о равенстве нулю массы гравитона согласуется с объективной реальностью.

К сожалению, число найденных точных решений в таких теориях невелико. В частности, в рамках теории гравитации Виссера [1] в работе [2] найдено только решение, описывающее гравитационное поле, которое создает плоская эллиптически поляризованная электромагнитная волна. В этом случае при использовании галилеевских координат плоского фоновое пространство-времени ненулевые компоненты метрического тензора риманова пространства-времени можно записать в виде

$$\begin{aligned} g^{00} &= 1 - F(ct - z), & g^{11} &= g^{22} = -1, \\ g^{33} &= -1 - F(ct - z), & g^{03} &= -F(ct - z), \\ F(ct - z) &= -\frac{2G\hbar^2}{m_g^2 c^6} [h_1^2(ct - z) + h_2^2(ct - z)], \end{aligned} \quad (1)$$

где G — гравитационная постоянная, \hbar — постоянная Планка, m_g — масса гравитона, а $h_1(ct - z)$ и $h_2(ct - z)$ — произвольные функции от переменных $ct - z$, выбор которых означает выбор определенного

волнового пакета и состояния поляризации электромагнитной волны.

Совершенно аналогично работе [2] можно найти компоненты гравитационного поля, создаваемого плоской волной безмассового скалярного поля. В этом случае метрический тензор имеет ту же структуру, что и в (1), но отличается выражением для функции $F(ct - z)$:

$$F(ct - z) = -\frac{2G\hbar^2}{m_g^2 c^6} h_3^2(ct - z), \quad (2)$$

где $h_3(ct - z)$ описывает волновой пакет безмассового скалярного поля.

Так как метрики (1) и (2) имеют одинаковый вид, различаясь только обозначениями, то их исследование проводится одинаково.

Используя метод Гамильтона–Якоби, изучим геодезическое движение массивных и безмассовых частиц в гравитационных полях (1) и (2). Решение уравнений Гамильтона–Якоби для частицы, имеющей массу m_0 , в координатах ct, x, y и z фоновое пространство-времени имеет вид

$$\begin{aligned} S &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + m_0^2 c^2}{2\alpha_3} (ct - z) + \\ &+ \frac{\alpha_3}{2} \int_{ct-z}^{ct-z} F(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (3)$$

где α_1, α_2 и α_3 — параметры, вводимые для разделения переменных.