Из приведенных рассуждений и примеров видно, что метод GCV нельзя использовать для решения некорректно поставленных задач. В случае же корректных СЛАУ необходимо исследовать область применимости метода GCV. Пример 5 показывает, что существуют такие возмущенные системы линейных уравнений, для которых метод GCV дает нормальное псевдорешение системы (1). Но последний пример имеет характерную особенность: параметр регуляризации $\alpha = 0$ независимо от погрешности h. А такие ситуации, когда параметр $\alpha = 0$, часто возникают и при выборе параметра регуляризации другими методами. Поэтому данный пример не характерен для обоснования правильности выбора параметра регуляризации по методу GCV. В любом случае пример 4 показывает несостоятельность метода GCV для корректных задач, так как при одной и той же возмущенной матрице можно, согласно данному методу, различными способами выбрать параметр регуляризации так, что полученные «приближенные решения» находятся на конечном расстоянии друг от друга. Пример 3 показывает, что найденное по методу GCV «решение» таковым не является.

Работа выполнена при поддержке программы «Университеты России — Фундаментальные исследования» (грант 4-5220) и РФФИ (грант 99-01-00447).

Литература

1. *Тихонов А.Н.* // ДАН СССР. 1963. **153**, №1. С. 49.
2. *Тихонов А.Н.* // ДАН СССР. 1963. **151**, №3. С. 501.
3. *Леонов А.С., Ягола А.Г.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1995. №4. С. 28 (Moscow University Phys. Bull. 1995. No. 4. P. 25).
4. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
5. *Тихонов А.Н., Гончарский А.Н., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.
6. *Тихонов А.Н.* // ДАН СССР. 1985. **280**, №3. С. 559.
7. *Бакушинский А.Б.* // ЖВМ и МФ. 1984. **24**, №8. С. 1258.
8. *Wahba G.* // SIAM J. Numer. Anal. 1977. **14**, No. 4. P. 651.
9. *O'Sullivan F., Wahba G.* // J. Comput. Phys. 1985. **59**, No. 3. P. 441.
10. *Wahba G.* // Remote Sensing Retrieval Methods / Eds. H. Fleming, M. Chahine. Hampton, VA, 1985. P. 385.
11. *Bates D. M., Wahba G.* // Treatment of Integral Equations by Numerical Methods / Eds. C.T.H. Baker, G.F. Miller. L.: Acad. Press, 1982. P. 283.
12. *Wahba G.* Spline Models for Observation Data (CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics; 59). Philadelphia, Pensilvania: Soc. for Industr. and Appl. Mathem., 1990.
13. *Gu C., Heckman N., Wahba G.* // Statistics and Probability Letters. 1992. **14**. P. 283.
14. *Lukas M.A.* // Report No. 43, Centre for Mathematical Analysis, Australian National University. Canberra, 1990.
15. *Nychka D., Wahba G., Goldfarb S., Pugh T.* // J. Amer. Statist. Assoc. 1984. **79**, No. 38. P. 832.
16. *Wahba G.* // Remote Sensing Retrieval Methods / Eds. A. Deepak, H. Fleming, J. Theon. Hampton, VA, 1989. P. 347.

Поступила в редакцию
03.11.99

УДК 530.145

СТРУКТУРА ПОЛЯРИЗАЦИОННОГО ОПЕРАТОРА ФОТОНА ВО ВНЕШНЕМ НЕОДНОРОДНОМ НЕАБЕЛЕВОМ ПОЛЕ

В. Ч. Жуковский, В. В. Худяков

(*кафедра теоретической физики*)

Рассматривается поляризационный оператор (ПО) фотона во внешнем постоянном хромомагнитном поле. Для случая слабого однородного хромомагнитного поля получены однопетлевые вклады в антисимметричную часть ПО за счет скалярных и спинорных кварков, а также индуцированная топологическая масса фотона. Рассмотрен ПО в случае неоднородного внешнего поля на примере поля инстантона.

Введение

Структура физического вакуума квантовой хромодинамики (КХД) во многом определяется наличием кваркового и глюонного конденсатов, $\langle \bar{q}q \rangle$ и $\langle (\alpha_s/\pi) G^a_{\mu\nu} G^a_{\mu\nu} \rangle$ соответственно [1]. Неабелевы калибровочные поля, описывающие глюоны, обладают нетривиальными топологическими свойствами. Конденсат может быть выбран в виде таких классических решений уравнений калибровочного поля, как монополи и инстантоны [2]. На фоне подобных полей поведение взаимодействующих кварков и глюонов является существенно непертурбативным [3]. В (2+1)-мерном аналоге КХД учет радиационных поправок индуцирует топологический член Черна–Саймонса, что сопровождается появлением массы калибровочного поля, не нарушающей калибровочную инвариантность теории (этот процесс альтернативен по отношению к механизму спонтанного нарушения симметрии [4]). Индуцированная топологическая масса играет важную роль в регуляризации инфракрасных расходимостей многопетлевых диаграмм [5]. Появление антисимметричной части ПО означает возникновение анизотропии пространства, проявляющейся при распространении электромагнитного поля. К этому эффекту в (3+1)-мерной теории может приводить наличие конденсата калибровочного поля [6].

В однопетлевом приближении вклад скалярных кварков в ПО на фоне неабелевого конденсата был вычислен в работе [7]. Для спинорных кварков была определена индуцируемая слабым внешним полем топологическая масса фотона [8]. В настоящей работе приведены выражения для вклада скалярных и спинорных кварков в антисимметричную часть ПО в низшем порядке разложения по слабому внешнему однородному полю, вычисленные в рамках $SU(2)$ модели КХД [9]. Рассматривается ПО на фоне инстантона и обсуждается влияние неоднородности внешнего поля на вид ПО.

1. Вклад скалярных кварков

Воспользуемся моделью кварков, описываемых скалярным полем $\phi(x) = \phi^a T^a$ в фундаментальном представлении, которое взаимодействует с электромагнитным полем $\mathcal{A}_\mu(x)$ и неабелевым калибровочным полем $A_\mu = A^a_\mu T^a$ в группе $SU(2)$. Поле A_μ в дальнейшем будем называть полем глюонов. Предполагая наличие глюонного конденсата A_μ, пренебрежем на его фоне квантовыми флуктуациями калибровочного поля. Лагранжиан системы имеет вид

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+|D_\mu\phi|^2-m^2|\phi|^2+eJ_\mu\mathcal{A}^\mu+e^2|\phi|^2\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}^\mu .$$

Здесь $F_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathcal{A}_\nu - \partial_\nu\mathcal{A}_\mu$ — тензор электромагнитного поля и $J_\mu = i\phi^+(D_\mu\phi) - i(D_\mu\phi)^+\phi$ — электромагнитный ток скалярных кварков в поле глюонного конденсата, $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$. Рассмотрим глюонный конденсат в виде однородного хромомагнитного поля, предполагая, что вектор-потенциал не зависит от координат и $[A_\mu, A_\nu] = iG_{\mu\nu}$ [10]. Тогда уравнение для скалярной функции Грина $(P^2 - m^2)G(p) = 1$ имеет решение [7]

$$G(p) = (p^2 - m^2 + Y/4 - 2p_\mu A^\mu)\times \times \left[(p^2 - m^2 + Y/4)^2 - p_\mu\varphi^{\mu\nu}p_\nu\right]^{-1}, \tag{1}$$

где введены обозначения: $P_\mu = iD_\mu$, $Y^{ab} = A^a_\mu A^b_\nu g^{\mu\nu}$, $Y = Y^{aa}$, $\varphi_{\mu\nu} = A^a_\mu A^a_\nu$, $g^{\mu\nu}$ — метрический тензор в пространстве Минковского.

Антисимметричная часть ПО, $\Pi^{\mathrm{a}}_{\mu\nu}(q,q')$, в однопетлевом приближении записывается следующим образом:

$$\Pi^{\mathrm{a}}_{\mu\nu}(q,q') = -4ie^2\delta^4(q+q')\times \times \int d^4p\,\mathrm{tr}\left[P_\mu G(p-q/2)P_\nu G(p+q/2) - (\mu\leftrightarrow\nu)\right], \tag{2}$$

где q — это 4-импульс фотона. След в (2) включает также суммирование по цветовым индексам. Наличие в (2) δ-функции — прямое следствие трансляционной инвариантности фонового потенциала A_μ. Учитывая диагональность ПО по импульсу, в дальнейшем будем использовать обозначение $\Pi_{\mu\nu}(q,q') = (2\pi)^4\delta(q+q')\Pi_{\mu\nu}(q)$. В случае слабого внешнего поля можно разложить функцию Грина $G(p)$, определенную соотношением (1), в ряд по степеням A_μ. Из (1) и (2) видно, что $\Pi^{\mathrm{a}}_{\mu\nu}(q)$ зависит только от трех размерных параметров: A^a_μ, q_μ и m. Принимая во внимание ковариантность и поперечность ПО, заключаем, что в антисимметричную часть ПО, $\Pi^{\mathrm{a}}_{\mu\nu}$, должны давать вклад третья, пятая и более высокие нечетные степени потенциала поля конденсата A_μ.

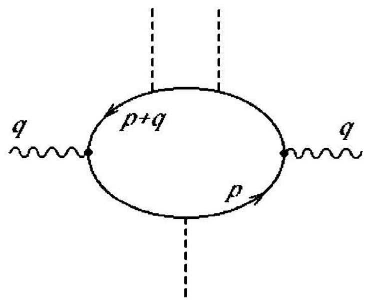

Диаграмма Фейнмана ПО фотона, соответствующая порядку $O(A^3)$ разложения по потенциалу внешнего поля

Подставляя (1) в (2) и вычисляя след, получим разложение в ряд по степеням A_μ для ПО. Как показывают вычисления, член порядка $O(A^3)$ в разложении $\Pi^{\mathrm{a}}_{\mu\nu}$ тождественно равен нулю. Соответствующая диаграмма Фейнмана представлена на рисунке, на котором волнистые линии соответствуют электромагнитному полю, пунктирные — внешнему неабелевому полю, а сплошные — полю скалярных кварков. Первым неисчезающим приближением будет $O(A^5)$. Для сферически симметричной конфигурации внешнего хромомагнитного поля $A^a_i = \sqrt{\lambda}\delta^a_i$, $A^a_0 = 0$ имеем $Y = -3\lambda$, $(Aq)^2 = (\mathbf{q})^2\lambda$. Пренебрегая высшими степенями внешнего поля, в результате получаем

$$\Pi^{\mathrm{a}}_{ab}(q) = \frac{i\pi^2e^2\lambda^{5/2}}{(2\pi)^4m^4}\varepsilon_{abc}q^c\Pi^{\mathrm{a}},\quad a,b=\{1,2,3\},\quad \Pi^{\mathrm{a}}_{0\mu}=0,$$

$$\Pi^{\mathrm{a}} = -\frac{1}{96}\,\frac{1}{r^7\sqrt{1-r^2}(r^2-1)^2}\times \times\left[16r^8 - 28r^6 + (24E^2+9)r^4 - 36E^2r^2 + 15E^2\right]\times \times\,\mathrm{arctg}(r/\sqrt{1-r^2}) - -\frac{1}{96}\,\frac{6r^6 - (9+8E^2)r^4 + 26E^2r^2 - 15E^2}{r^6(r^2-1)^2}, \tag{3}$$

где $r^2 = q_\mu q^\mu/(4m^2)$ и $E = q_0/(2m)$. Последняя формула (3) справедлива при $0 \leqslant r^2 \leqslant 1$. Предположение о наличии у массы кварка малой мнимой добавки $m^2 \to m^2 - i\epsilon$, задающей обход полюсов при интегрировании, позволяет аналитически продолжить (3) в область произвольного действительного r^2. Представим антисимметричную часть ПО в виде $\Pi^{\mathrm{a}}_{\mu\nu} = i\varepsilon_{\mu\nu\alpha}q^\alpha\tilde{\Pi}^{\mathrm{a}}(q^2)$. Конечный предел

$\tilde{\Pi}^{\rm a}(q^2) \neq 0$ при $r = 0$ означает наличие индуцированной топологической массы фотона

$$\theta_{\rm ind} = \lim_{q\to 0} \tilde{\Pi}^{\rm a}(q^2) = \frac{1}{96\pi^2}\frac{e^2}{m^4}\lambda^{5/2}.$$

При $r = 1$ ПО имеет неинтегрируемую особенность. Результат, полученный в первом порядке разложения при $r^2 \to -\infty$, совпадает со значением, найденным в статье [7].

2. Вклад спинорных кварков

Рассмотрим спинорное поле кварков $\psi(x)$ в рамках той же модели, что и в предыдущем разделе. Лагранжиан взаимодействия $\psi(x)$ с электромагнитным полем $\mathcal{A}_\mu(x)$ на фоне хромомагнитного поля имеет вид

$$\mathcal{L}_{\rm sp} = \frac{i}{2}(\overline{\psi} D_\mu \gamma^\mu \psi - \overline{D_\mu \psi}\gamma^\mu \psi) - m\overline{\psi}\psi + eJ_\mu \mathcal{A}^\mu,$$

где $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$ и $J_\mu = \overline{\psi}\gamma_\mu\psi$. В этом случае ПО в импульсном представлении

$$\Pi_{\mu\nu}(q,q') = ie^2\delta^4(q+q') \times \times \int d^4p \mathrm{tr}\left[\gamma_\mu S(p+\frac{q}{2})\gamma_\nu S(p-\frac{q}{2})\right] \quad (4)$$

выражается через функцию Грина спинорных кварков во внешнем поле $S(p) = (\gamma P - m)^{-1}$. Вычислим в однопетлевом приближении вклад в $\Pi^{\rm a}_{\mu\nu}(q,q')$ спинорных кварков $\psi(x)$ по аналогии с тем, как это было сделано для скалярных кварков. Антисимметризуем (4) по индексам μ, ν и подставим в него разложение $S(p)$ в ряд по слабому внешнему полю A_μ. В отличие от скалярного случая здесь главный вклад в ПО (4) дают слагаемые порядка $O(A^3)$. Этот вклад пропорционален спиновой матрице $\sigma_{\mu\nu}$.

Напомним, что в чистой электродинамике, согласно теореме Фарри, диаграммы, содержащие хотя бы одну спинорную петлю с нечетным числом звеньев, взаимно компенсируются. В нашем случае это утверждение неверно, так как в теории присутствует некоммутативное внешнее поле. Вычисляя след по спинорным и цветовым индексам, после интегрирования по импульсу получим антисимметричную часть ПО в явном виде:

$$\Pi^{\rm a}_{\mu\nu}(q) = \frac{i\pi^2 e^2}{(2\pi)^4 m^2}\varepsilon^{abc}A^a_\mu A^b_\nu (A^c q)\Pi^{\rm a},$$

$$\Pi^{\rm a} = -\frac{\mathrm{arctg}(r/\sqrt{1-r^2})(2-9r^2+6r^4)}{2r^3(1-r^2)^{3/2}} - \frac{(r^2-2)}{2r^2(1-r^2)}.$$

В случае сферически симметричного потенциала имеем:

$$\Pi^{\rm a}_{ab}(q) = \frac{i\pi^2 e^2 \lambda^{3/2}}{(2\pi)^4 m^2}\varepsilon_{abc}q^c\Pi^{\rm a},$$

$$a,b,c = \{1,2,3\}, \quad \Pi^{\rm a}_{0\mu} = 0.$$

Предел $\Pi^{\rm a}_{\mu\nu}(0)$, приводящий к топологической массе фотона

$$\theta_{\rm ind} = \frac{5}{24\pi^2}\frac{e^2}{m^2}\lambda^{3/2},$$

совпадает со значением, полученным в работах [8]. Антисимметричная часть ПО в силу своей тензорной структуры поперечна (ее свертка с 4-импульсом фотона тождественно обращается в нуль).

3. Вычисление ПО на фоне инстантона

Вернемся к скалярной модели кварков, но в качестве внешнего поля выберем инстантонное решение уравнений калибровочного поля:

$$A^a_\mu = 2\eta_{a\mu\nu}\frac{x_\nu}{x^2+\rho^2},$$

$$\eta_{a\mu\nu} = \begin{cases}\varepsilon_{a\mu\nu}; & \mu,\nu = 1,2,3, \\ -\delta_{a\nu}; \quad \mu = 4; & \delta_{a\mu}; \quad \nu = 4.\end{cases}$$

Функция Грина скалярных кварков на фоне неоднородного поля не обладает трансляционной инвариантностью и, следовательно, зависит от двух переменных: $G(k,k')$. То же справедливо и для ПО, который в этом случае недиагонален по импульсу (см. (2)). Не вдаваясь в подробные вычисления, отметим, что функция Грина теперь не имеет явного представления (как, например, в случае однородного поля, см. (1)), но при разложении по степеням слабого поля (при больших ρ) представляется в виде суммы многократных интегралов по 4-импульсу $G(k,k') = G_0 + G_1 + G_2 + \ldots$, где

$$G_0 = \frac{-(2\pi)^4\delta(k+k')}{(k^2+m^2)}, \quad G_1 = \frac{(k-k')_\mu A_\mu(k+k')}{(k^2+m^2)(k'^2+m^2)},$$

$$G_2 = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{A_\alpha(k+q)A_\beta(k'-q)}{(k^2+m^2)(k'^2+m^2)} \times \times \left[-\frac{g_{\alpha\beta}}{4} + \frac{(k-q)_\alpha(k'+q)_\beta}{q^2+m^2}\right]. \quad (5)$$

Раскрывая T-произведение в определении ПО

$$\Pi^{\rm a}_{\mu\nu}(x,y) = ie^2\langle 0|TJ_\mu(x)J_\nu(y)|0\rangle - (\mu \leftrightarrow \nu)$$

и используя разложение функции Грина (5), получим соответствующее разложение по степеням внешнего поля. Непосредственные вычисления дают следующее выражение для ПО в порядке $O(A^2)$:

$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu}(q,q') = ie^2\Big(f_1\delta_{\mu\nu} + f_2(q_\mu q'_\nu + q_\nu q'_\mu) + + f_3(q_\mu q'_\nu - q_\nu q'_\mu) + f_4\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}q_\alpha q'_\beta\Big). \quad (6)$$

Коэффициенты $f_n = f_n(q^2, q'^2, qq', \rho)$ представляются в виде многократных интегралов, которые не удается вычислить точно из-за их громоздкости. Однако можно проанализировать общую структуру этих коэффициентов. Так, например, в пределе $m = 0$, $q\rho \gg 1$, $q'\rho \gg 1$ имеем:

$$f_n(q^2, q'^2, qq', \rho) \simeq \tilde{f}_n(q^2, q'^2, qq', \rho) \times$$
$$\times \exp\left(-\rho\sqrt{C_{1n}q^2 + C_{2n}qq' + C_{3n}q'^2}\right),$$

где $\tilde{f}_n$ является некоторой степенной функцией своих аргументов. Для моделирования физического вакуума необходимо провести суммирование по размерам, положениям центров, ориентациям и плотности распределения инстантонов. Таким образом, степенное убывание потенциала инстантона приводит к экспоненциальному убыванию ПО с ростом импульса. Наличие экспоненциального члена в ПО является следствием чисто мнимых полюсов в пропагаторе кварка, что подробно обсуждается в работе [11]. Вклад спинорных кварков в ПО в координатном представлении был вычислен в работе [12], там же получено импульсное представление усредненного ПО (см. также [13]). Антисимметричная часть ПО при усреднении, очевидно, исчезает.

Заключение

Наличие антисимметричной части ПО в рассмотренной модели означает, что внешнее неабелево цветовое поле приводит к анизотропии пространства [6]. Недавние астрофизические наблюдения [14] указывают на то, что вращение плоскости поляризации электромагнитного излучения удаленных объектов не объясняется одним лишь эффектом Фарадея. Можно предположить, что определенный вклад вносят наличие конденсата и связанная с ним нетривиальная топологическая структура вакуума.

Из (6) следует, что в случае неоднородного внешнего поля антисимметричная часть ПО возникает уже в порядке $O(A^2)$, в отличие от однородного конденсата [8], где она имеет порядок $O(A^3)$ благодаря неабелевой структуре потенциала A_μ.

Работа выполнена в рамках совместного проекта физического факультета МГУ и Немецкого научно-исследовательского общества (грант DFG 436 RUS 113/477).

Литература

1. *Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I.* // Nucl. Phys. 1979. **B147**. P. 385; 448.
2. *Belavin A., Polyakov A., Schwartz A.* et al. // Phys. Lett. 1975. **B59**. P. 85; *Callan C.G., Dashen R., Gross D.J.* // Phys. Rev. 1978. **D17**. P. 2717.
3. *Dubovikov M.S., Smilga A.V.* // Nucl. Phys. 1981. **B185**. P. 109.
4. *Jackiw R., Templeton S.* // Phys. Rev. 1981. **D23**. P. 2291; *Schonfield N.* // Nucl. Phys. 1981. **B185**. P. 157.
5. *Жуковский К.В., Эминов П.А.* // Ядерная физика. 1996. **59**. С. 1265; *Zhukovskii K.V., Eminov P.A.* // Phys. Lett. 1995. **B359**. P. 155; *Жуковский В.Ч., Песков Н.А., Афиногенов А.Ю.* // Ядерная физика. 1998. **61**. С. 1408.
6. *Carroll S.M., Field G.B., Jackiw R.* // Phys. Rev. 1990. **D41**. P. 1231.
7. *Averin A.V., Borisov A.V., Zhukovskii V.Ch.* // Z. Phys. 1990. **C48**. P. 457.
8. *Ebert D., Zhukovsky V.Ch.* // Theory of Elementary Particles: Proc. 31st Intern. Symp. Ahrenshoop on the Theory of Elementary Particles, Buckow, 2–6 September, 1997. Singapore: World Scientific Publishing Company, 1998. P. 189; *Ebert D., Zhukovsky V.Ch.* Preprint HU-EP-97/87, 1997; E-print Archive: hep-th/9712016.
9. *Жуковский В.Ч., Худяков В.В.* // Ядерная физика. 1999. **62**. С. 1889.
10. *Brown L.S., Weisberger W.I.* // Nucl. Phys. 1979. **B157**. P. 285.
11. *Chibisov B., Dikeman R.D., Shifman M., Uraltsev N.G.* // Int. J. Mod. Phys. 1997. **A12**. P. 2075; E-print Archive: hep-ph/9605465.
12. *Carlitz R., Lee Ch.* // Phys. Rev. 1978. **D17**. P. 3238; *Andrei N., Gross D.J.* // Ibid. 1978. **D18**. P. 468.
13. *Dubovikov M.S., Smilga A.V.* // Nucl. Phys. 1981. **B185**. P. 109.
14. *Nodland B., Ralston J.P.* // Phys. Rev. Lett. 1997. **79**. P. 1958.

Поступила в редакцию
05.11.99